UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Aprendizaje cooperativo para la enseñanza de Límites y Continuidad en 4º ESO

Autor/es

LAURA RÁEZ REY

Director/es

JUAN MIGUEL RIBERA PUCHADES

Facultad

Escuela de Máster y Doctorado de la Universidad de La Rioja

Titulación

Máster Universitario de Profesorado, especialidad Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2017-18

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

Trabajo de Fin de Máster

APRENDIZAJE COOPERATIVO PARA LA ENSEÑANZA DE LÍMITES Y CONTINUIDAD EN 4º ESO

Autor:

Laura Ráez Rey

Tutor/es: Juan Miguel Ribera Puchades

MÁSTER:
Máster en Profesorado, Matemáticas (M06A)

Escuela de Máster y Doctorado

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

AÑO ACADÉMICO: 2017/2018

INDICE

RESUMEN

El presente Trabajo Fin de Máster (TFM), recoge una propuesta práctica para la enseñanza de la unidad didáctica de *Límites y Continuidad* en un aula de 4º de ESO, aplicando una metodología de aprendizaje cooperativo.

Para atender a la desmotivación de los alumnos/as frente a la asignatura de matemáticas, hemos buscado como solución, la aplicación del aprendizaje cooperativo, que nos permite mejorar la predisposición de los estudiantes hacia la asignatura, aumentar su interés y motivación, a la vez que logramos un mejor ambiente en el aula.

Así, analizamos las principales características del aprendizaje cooperativo, sus ventajas e inconvenientes y diseñamos una unidad didáctica compuesta por nueve sesiones. Con ella, pretendemos hacer llegar esta metodología al aula, de forma que ayudemos a los alumnos/as a comprender y asimilar los contenidos correspondientes de una forma eficaz y duradera en el tiempo.

ABSTRACT

The present Final Master Project (FMP), includes a practical proposal for the teaching of the didactic unit of *Limits and Continuity* in a classroom of 4th ESO, applying a cooperative learning methodology.

In order to adress the motivation of the students with regard to the subject of mathematics, we have sought as a solution, the application of cooperative learnings, which allows us improving the student's predisposition towards the subject, increasing their interest and motivation, while at the same time we achieved a better atmosphere in the classroom.

Thus, we analyze the main characteristics of cooperative learning, its advantages and disadvantages and desing a didactic unit composed of nine sessions. With it, we intend to bring this methodology to the classroom, so that we help students understand and assimilate the corresponding content in an effective and lasting way over time.

1. INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Nos encontramos en el término del Máster universitario en profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, especialidad Matemáticas impartido por la Universidad de La Rioja.

Nos gustaría destacar la asignatura *Practicum en la especialidad de Matemáticas,* una asignatura meramente práctica que se ha llevado a cabo en un centro educativo. En ella, los alumnos/as de dicho máster hemos puesto en práctica todo lo aprendido en los meses anteriores y así, la formación teórica adquirida se ha complementado con una formación didáctica dentro de un aula de matemáticas.

Debemos explicar que en este período práctico hemos observado tanto la metodología del docente como el comportamiento de los alumnos/as. Primeramente, nuestra mayor preocupación era transmitir nuestros conocimientos matemáticos a los alumnos/as, pero a los pocos días observamos una falta de motivación generalizada por parte de éstos. Esta falta de motivación provenía en parte, por la metodología empleada por el profesor/a de matemáticas (clase magistral), que no les permitía apenas participar. Únicamente tomaban apuntes y copiaban los ejercicios explicados en la pizarra. También observamos que no seguían el hilo de la explicación ya que se encontraban copiando lo explicado varios minutos atrás. De esta forma no se producía un aprendizaje significativo de las matemáticas, y muchos de los alumnos/as ya habían buscado ayuda fuera del centro: clases particulares.

Durante las clases de matemáticas que impartimos (tanto en Educación Secundaria Obligatoria como en Bachillerato), intentamos motivar a los alumnos/as de forma que la unidad didáctica impartida les supusiera un reto, una motivación (cada cual tiene la suya) y les sirviese no sólo para aprobar el examen, si no que los conocimientos adquiridos fueran formando una base sólida para afrontar los retos de estudios superiores y para solventar los problemas que se plantean en el día a día.

Es por ello que modificamos la idea primera que teníamos sobre el TFM (flipped classroom), ya que vimos que en las aulas de matemáticas en las que íbamos a impartir clase había otras necesidades que atender. De esta forma decidimos desarrollar nuestro TFM sobre metodologías que fomentasen la motivación de los alumnos/as.

Para poder desarrollar este trabajo, ha sido fundamental la enseñanza teórico-práctica que hemos adquirido durante el estudio de este Máster.

El objetivo principal que estos estudios persiguen es formarnos a nosotros, sus alumnos/as, de tal forma que adquiramos las competencias necesarias para desempeñar una labor como docentes de matemáticas.

Para conseguirlo, es necesario que estemos capacitados para inculcar conocimientos a nuestros futuros alumnos/as, teniendo en cuenta la formación previa de éstos. Por tanto, debemos ser capaces de adecuarnos al nivel del aula en el que impartiremos clase, así como de adaptarnos a las necesidades educativas que cada uno de los alumnos/as presente.

2. OBJETIVOS

Uno de los aspectos principales que debemos mencionar en el presente trabajo son sus objetivos. Así, como objetivo principal, indicamos el que sigue:

- Presentar una propuesta de intervención en el aula de matemáticas para la unidad didáctica de límites y continuidad en un aula de 4º de la ESO, basándonos en una metodología cooperativa.

Tomando este objetivo como base fundamental, hemos determinado varios objetivos específicos, que se encuentran asociados al objetivo principal:

- Mejorar la motivación que los alumnos/as disponen hacia la asignatura de matemáticas, consiguiendo así un mejor rendimiento escolar.
- Lograr que el aprendizaje adquirido por los estudiantes perdure en el tiempo.
- Maximizar el aprendizaje de los alumnos/as de forma individual y grupal, aumentando la interacción y participación de todos ellos en el transcurso de las sesiones.
- Trabajar competencias sociales, tales como la interdependencia positiva, responsabilidad, participación, autocrítica, etc.
- Atender a la diversidad en las aulas, aprovechando la heterogeneidad existente.
- Obtener un mayor conocimiento de las metodologías constructivistas, concretamente del aprendizaje cooperativo y su posible aplicación en el aula, comparándolo con la metodología tradicional.
- Capacitar a los alumnos/as para que manejen con soltura todos los conceptos aprendidos referentes a límites y continuidad de funciones.
- Enseñar los conceptos matemáticos a través de la interacción tanto con el docente como con sus propios compañeros.
- Capacitar a los estudiantes para exponer explicaciones frente a sus compañeros.
- Educar en valores, de forma que los alumnos/as desempeñen un papel humano en la sociedad que les rodea, comenzando por respetar y ayudar a sus compañeros de aula.

3. MARCO TEÓRICO

Como futuros profesores de matemáticas en enseñanzas no universitarias, los principales alumnos/as a los que se dirigirán nuestras clases serán adolescentes. Por lo tanto, consideramos muy importante tener un conocimiento profundo de esta etapa de la vida.

Tal y como hemos mencionado en el apartado anterior, uno de nuestros objetivos como docentes será, entre otros, maximizar el aprendizaje de los alumnos/as de forma individual y grupal. Para lograrlo, nosotros seremos su punto de apoyo y referencia, pero ellos deben aprender a trabajar de forma autónoma; a aprender a aprender.

En este apartado nos centraremos fundamentalmente en lo aprendido en la asignatura Aprendizaje y desarrollo de la personalidad, impartida por Eduardo Fonseca Pedrero.

3.1. Desarrollo del pensamiento adolescente

Los adolescentes experimentan cambios visibles como el desarrollo físico, diferente en chicos y en chicas, pero además existen otros cambios menos visibles asociados a la adolescencia, como son los cambios cerebrales y del pensamiento.

Centrándonos en este último, diremos que los adolescentes sufren cambios intelectuales y adquieren nuevas habilidades cognitivas (memoria, lenguaje, atención, funciones ejecutivas, metacognición y cognición social) (Fonseca Pedrero, 2018).

A continuación, enumeraremos los principales aspectos del desarrollo adolescente:

Como principales rasgos cognitivos de los adolescentes destacamos el idealismo o capacidad de tomar lo real entre una posibilidad más entre las concebibles. Además los adolescentes tienden a buscar de manera constante las oportunidades de poner a prueba sus capacidades de razonamiento, por lo que suelen discutir con frecuencia (Fonseca Pedrero, 2018).

Podemos aprovechar esta característica de los adolescentes para plantear cuestiones o resoluciones de ejercicios en nuestras sesiones de matemáticas, en las los estudiantes puedan intervenir razonando el porqué de su punto de vista.

Otra característica propia del adolescente es que se siente muy observado por la gente que le rodea y se considera a sí mismo como un ser único, excepcional e irrepetible. Estas percepciones reciben el nombre de “egocentrismo” (Fonseca Pedrero, 2018).

Derivado de esta característica, es muy probable que los alumnos/as tengan miedo a hablar el público o incluso salir a la pizarra a resolver algún ejercicio de matemáticas, por no equivocarse y tener que enfrentarse a lo que sus compañeros puedan decir o pensar. Como docentes debemos trabajar este punto y crear un ambiente de comprensión y confianza en el aula, para que los estudiantes comprendan que cada uno de ellos es una pieza fundamental en la construcción del aprendizaje de toda la clase, que si salen a la pizarra y se equivocan, todos aprenden y nadie se va a reír por ello.

Además, dentro del tránsito de la niñez a la adolescencia, que supone un cambio paulatino del pensamiento, el individuo desarrolla la capacidad de razonar sobre la realidad que les rodea, como por ejemplo, los riesgos que tienen realizar determinadas conductas.

Son muchos los adolescentes que asumen todo tipo de riegos sin tomar las precauciones necesarias, teniendo la certeza de que a ellos no les puede suceder nada malo. Claro que son conocedores de los riesgos de las actuaciones, pero en ningún caso pensarían que ellos podrían ser las víctimas. A esta sensación se le acuñó con el nombre de “fábula de invencibilidad” (Fonseca Pedrero, 2018).

3.2. Principales modelos de enseñanza-aprendizaje

En la asignatura previamente mencionada, hemos estudiado los principales modelos de enseñanza-aprendizaje. Cada uno de los modelos surge como razonamiento del comportamiento humano desde un punto de vista distinto.

Nos parece muy importante conocer cada uno de estos modelos para comprender el proceso de enseñanza-aprendizaje de nuestros estudiantes y poder tenerlos en cuenta a la hora de diseñar nuestras sesiones de matemáticas. De esta forma, hacemos una breve alusión a cada uno de ellos:

Los primeros modelos que hemos estudiado son las Teorías innatistas, que dan mucha importancia a las habilidades que nos son innatas, lo genético; las Teorías etológicas, que estudian el desarrollo humano dentro del contexto del desarrollo animal y la Teoría ecológica, que centra su atención en el entorno del individuo (Fonseca Pedrero, 2018).

Todas estas teorías son importantes, pero ninguna de ellas lo es de manera individual, sino que deben ser combinadas entre ellas para poder entender el aprendizaje humano. Si no fuese así y, por ejemplo, creyésemos que únicamente lo innato tuviese importancia, ¿qué sentido tiene que eduquemos?

Además, hemos estudiado los tres modelos de mayor importancia que son: las Teorías del aprendizaje, para las cuales la conducta siempre varía en función de sus consecuencias; los modelos cognitivos, que comprenden que los cambios que se observan en las conductas de un individuo tienen lugar principalmente como resultados de cambios en su conocimiento y capacidad intelectual y los modelos constructivistas, quienes entienden que el conocimiento que un individuo adquiere es el resultado de la confección de la información que éste recibe, es decir, es constructor de su conocimiento.

Una vez comprendida la perspectiva de cada uno de los modelos mencionados, nos hemos interesado especialmente en profundizar en mayor medida en estos modelos constructivistas, ya que la idea de que el alumno/a sea constructor de su propio conocimiento nos parece una herramienta muy útil a la hora de conseguir los objetivos que nos hemos propuesto al comienzo de este trabajo.

A continuación ahondamos en estos modelos, para obtener más detalles de las características que los definen.

3.3. Modelos constructivistas

Como hemos dicho anteriormente, para los modelos constructivistas el alumno/a no se limita a almacenar los conocimientos impartidos por el docente, sino que es constructor de su conocimiento. Para ello, debe participar activamente en el proceso de aprendizaje, haciendo uso de los conocimientos previos que ya posee para asimilar los nuevos conceptos y habilidades. El alumno/a va construyendo su conocimiento basándose en aquello que ya domina.

La autora (Castillo, 2008) también tiene una opinión en esta dirección ya que afirma que un modelo constructivista hace hincapié en los alumnos/as como constructores de su propio conocimiento, el cual se crea a partir de las experiencias previas que los estudiantes experimentan, estructuras mentales y creencias o ideas que les surgen a la hora de hacer sus propias interpretaciones de sucesos u objetos.

Si llevamos esta idea al terreno matemático, nos damos cuenta de que su aplicación es perfecta, ya que la propia asignatura de matemáticas tiene una base a la que se van añadiendo más y más conceptos. Por ello, es muy importante construir una base sólida sobre la que se asienten todos los conocimientos que se adquieran posteriormente.

Como principales autores de estos modelos constructivistas, podemos mencionar a Piajet, Vygostki y Ausubel. Cada uno de estos tres autores desarrolló un modelo diferente y debemos decir que entre los tres existen pequeños matices que los diferencian. A continuación explicamos brevemente el punto de vista de cada uno de estos tres autores:

El modelo de Piajet se conoce con el nombre de Epistemología genética y se focaliza en la importancia del individuo como ser activo. Dentro de la construcción del conocimiento lo más importante es la adaptación del sujeto, en este caso nuestros alumnos/as, a un entorno que es cambia constantemente (Fonseca Pedrero, 2018).

Este modelo es muy importante, tan importante que, de hecho, las etapas de la Educación de nuestro País (Educación Infantil, Primaria, Educación Secundaria y Bachillerato) están fundamentadas en este modelo.

En segundo lugar, el modelo de Vygostki también habla de la importancia de la construcción del conocimiento pero no pone el acento en el individuo, sino en el contexto sociocultural que lo rodea, es decir, para que se dé la construcción del conocimiento, es muy importante el marco sociocultural, sociohistórico, etc. (Fonseca Pedrero, 2018).

De esta forma, podemos afirmar que el conocimiento no lo desarrolla un individuo por sí sólo, sino que lo hace en interacción con lo que le rodea, con un entorno social.

El modelo de Ausubel es el más reciente y defiende que, para exista aprendizaje, es imprescindible que los conocimientos que el estudiante posee se relacionen con los conocimientos nuevos. Ésta es el fundamento de la Teoría del Aprendizaje significativo enunciada por el mismo autor, y que va en contraposición con las metodologías tradicionales que defienden el aprendizaje de memoria (Fonseca Pedrero, 2018)

Debemos ser conscientes de que, para aplicar estos modelos en el aula, el alumno/a debe mostrar una actitud receptiva frente al material y al trabajo propuesto.

Además, al aplicar estos métodos constructivistas a la enseñanza de las matemáticas, debemos tener en cuenta la capacidad de abstracción que nuestros alumnos/as desarrollan en esta etapa de la vida. Esto significa que los alumnos/as que encontremos en el aula de matemáticas pueden despegarse de la realidad que hasta el momento conocen y considerar hipótesis más abstractas, lo cual nos favorece a la hora de dar nuestras explicaciones o plantear casos poco tangibles.

Como docentes que aplican estos métodos, acompañaremos al alumno/a en su proceso de aprendizaje, proporcionándole la ayuda que necesite para conseguir sus metas académicas, le enseñaremos a aprender.

4. ESTADO DE LA CUESTIÓN

Aunque en los últimos años se está haciendo mucho hincapié en la aplicación de nuevas metodologías en las aulas, la realidad es que en la mayoría de los centros educativos aún se lleva a cabo una metodología tradicional: tiza, pizarra y memoria.

Así lo ven (Pachano, Lizabeth; Terrán de Serrentino, 2005), quienes consideran que muchos profesores/as de matemáticas desarrollan el proceso de enseñanza-aprendizaje sin tener en cuenta los conocimientos previos que los alumnos/as poseen.

Como resultado, los estudiantes terminan memorizando los conceptos nuevos para poder aprobar el examen y terminan olvidándolos pasados unos días. De esta forma no logramos que los conocimientos perduren en el tiempo y se conviertan en una herramienta que se pueda utilizar en el futuro.

Este punto es muy importante para nosotros ya que si nuestros alumnos/as no recuerdan los conocimientos matemáticos adquiridos en cursos anteriores o incluso en unidades didácticas previas a la actual, ¿sobre qué base vamos a construir los nuevos conocimientos?

Los autores (Baños, Del Mar Ortiz-Camacho, Baena-Extremera, & Tristán-Rodríguez, 2017) también opinan en esta línea ya que afirman que muchos profesores/as siguen siendo partidarios de las metodologías tradicionales y hacen caso omiso a otras metodologías más innovadoras.

Esto genera un impacto negativo en los alumnos/as, que conlleva un bajo interés por la asignatura de matemáticas así como un bajo rendimiento académico.

Además, debemos tener en cuenta que, en las sesiones magistrales de matemáticas, los alumnos/as desempeñan un papel de elementos pasivos, que lleva asociado un bajo compromiso, participación y motivación hacia esta asignatura. Es posible que, como consecuencia, muchos alumnos/as lleguen a pensar que "las matemáticas son muy complicadas" o que ellos "no valen para estudiar matemáticas". Para nosotros, como docentes de matemáticas, es muy importante mantener la motivación de nuestros alumnos/as, ya que ésta es la llave que abre la puerta del aprendizaje.

Por otro lado, las autoras (Pachano, Lizabeth; Terrán de Serrentino, 2005), indican que los profesores/as de matemáticas debemos utilizar estrategias innovadoras para hacer que los conceptos nuevos sean accesibles a nuestros alumnos/as, que estimulen la iniciativa y creatividad de éstos, y que propicie la integración de esta asignatura entre los conocimientos de los estudiantes, junto con el resto de materias.

Pero, ¿cómo podemos implementar una metodología constructivista en el aula de matemáticas para mejorar la motivación y lograr el éxito del aprendizaje? Existen varias metodologías que ponen en práctica los conceptos que siguen los modelos constructivistas, entre las que se encuentra el aprendizaje cooperativo.

4.1. Aprendizaje cooperativo

Como hemos expresado, una de las metodologías que podemos encontrar dentro de los modelos constructivistas es el aprendizaje cooperativo. Desarrollamos este método de una forma más detallada, ya que basamos nuestro proyecto de innovación en este tipo de aprendizaje.

El aprendizaje no es un espectáculo al que se pueda ir como un mero espectador. Es imprescindible la implicación del alumno/a en este proceso. Y lograremos que este aprendizaje sea una tarea más fácil, si los estudiantes trabajan en grupos reducidos con sus compañeros. De esta forma, conseguimos que nuestros alumnos/as aprendan los objetivos asignados a la tares de forma individual y, al mismo tiempo, garantizamos que todos los componentes del grupo lo hacen.

Con aprendizaje cooperativo nos referimos a una metodología que propone la organización de actividades dentro del aula, que serán llevadas a cabo en grupos pequeños. Esta cooperación consiste en que los alumnos/as trabajen de forma conjunta con sus compañeros para lograr un fin común: resultados beneficiosos para ellos mismos y para los otros miembros que conforman el equipo. Personalmente valoramos este punto de una forma muy positiva, ya que en el futuro mundo laboral al que nuestros alumnos/as se unirán pasados unos años, la gran mayoría de los puestos de trabajo requieren la capacidad de trabajar con un equipo humano, por lo que conviene que sepan desenvolverse de forma correcta.

Las autoras (Pachano, Lizabeth; Terrán de Serrentino, 2005) comentan que dichos grupos comparten objetivos, metas y compromisos con el fin de llevar a cabo una tarea encomendada de manera colectiva.

Debemos tener en cuenta que no todo trabajo realizado en grupo recibe el nombre de trabajo cooperativo. Así, (Barriga & Hernández, 1999) afirman que, en un aprendizaje cooperativo, el papel del docente es imprescindible para lograr que los alumnos/as obtengan resultados beneficiosos para ellos mismos y también para sus compañeros de grupo. De esta forma, el aprendizaje individual de cada uno de ellos se verá incrementado. Estos autores además definen el concepto “cooperar” como trabajar para lograr metas compartidas, lo que se traduce en una interdependencia positiva entre los miembros del grupo.

Como profesores partidarios del método de aprendizaje cooperativo como estrategia de aprendizaje, debemos crear un ambiente en el aula en el que predominen el respeto y la confianza, de manera que todos y cada uno de los alumnos/as disponga de ocasión para realizar sus aportaciones personales, críticas, inquietudes, comentarios, etc. que enriquezcan el aprendizaje de todos los miembros del grupo-clase (Pachano, Lizabeth; Terrán de Serrentino, 2005).

4.1.1. Aprendizaje cooperativo. Ventajas

Si en nuestro día a día como docentes trabajamos una metodología de aprendizaje cooperativo con nuestros alumnos/as, veremos las múltiples ventajas que este método supone.

Según (Pachano, Lizabeth; Terrán de Serrentino, 2005) los alumnos/as que trabajan en grupos cooperativos adquieren más conocimientos, acuden más felices al centro escolar, desarrollan relaciones personales de mejor calidad, presentan un nivel de autoestima más alto y adquieren valores y habilidades sociales de una forma más efectiva.

También, al ser los alumnos/as responsables de su propio aprendizaje, conseguiremos que los conocimientos que adquieran sean más duraderos en el tiempo.

Además, (Rojas Soriano, 1999) verifica que, mediante la interacción entre alumnos/as y entre profesor/a y alumno/a es muy positiva ya que favorece la empatía entre todos los individuos y lo veremos reflejado en una mayor participación en las tareas a desarrollar.

Que los alumnos/as trabajen bajo una metodología cooperativa permite la consolidación de las relaciones entre iguales, ya que mejora su rendimiento académico, así como las relaciones socio-afectivas que se crean entre ellos como el respeto mutuo, la solidaridad y los sentimientos recíprocos de obligación y ayuda (Pachano, Lizabeth; Terrán de Serrentino, 2005).

La aplicación de una metodología cooperativa en el aula facilitará la aceptación social de los alumnos/as, disminuye la competitividad y se mejora la integración de todos los alumnos/as. Por ello, podemos emplear el aprendizaje cooperativo como método para la resolución de los conflictos que puedan surgir entre iguales, entre los que se encuentra en bullying. Este punto también consideramos que es muy interesante, ya que, más allá de los conocimientos matemáticos o de cualquier otra materia que puedan adquirir, deben aprender que por encima de todo somos personas a las que hay tratar con respeto y educación, independientemente de nuestras características, procedencia, cultura, etc.

Si nos preguntamos por los componentes fundamentales del aprendizaje cooperativo, (Johnson, Johnson, & Holubec, 1999) indican que éstos son la interdependencia positiva, la responsabilidad, la interacción cara a cara, las habilidades interpersonales y la reflexión grupal.

La interdependencia positiva sucede cuando los alumnos/as son solidarios con sus recursos y los comparten con sus compañeros, se apoyan mutuamente y celebran sus éxitos. Esto permite que se alcance el objetivo grupal de maximizar el aprendizaje de todos los miembros del grupo. La interacción cara a cara se da en el momento en que los estudiantes interactúan entre ellos para tomar decisiones; por ejemplo, cómo llevar a cabo una actividad determinada o enseñar el conocimiento que cada uno tiene a los demás miembros (Johnson et al., 1999).

Las habilidades interpersonales son latentes cuando los alumnos/as aprenden a conocerse y confiar los unos en los otros, a llevar a cabo una comunicación precisa y sin ambigüedades, a aceptarse tal cual son y apoyarse entre ellos y aprender a resolver los conflictos de una forma constructiva. Por último, respecto a la reflexión grupal, podemos decir que se da en diferentes momentos, a lo largo de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje (Johnson et al., 1999).

4.1.2. Aprendizaje cooperativo. Desventajas

Además de sus múltiples ventajas, debemos citar varias desventajas, sobre todo focalizadas en los profesores partidarios de metodologías tradicionales.

Dentro de una metodología cooperativa, los alumnos/as presentarán una actitud más participativa, y por lo tanto, realizarán más intervenciones en el aula. También discurrirán en mayor medida y plantearán sus inquietudes acerca de la unidad didáctica que estemos trabajando en el aula en dicho momento y analizarán temas que estén directa o indirectamente ligados a lo que se estudia. Estos grupos de trabajo pueden llegar a un punto de análisis y reflexión de la materia, que en ciertas circunstancias, puedan llegar a plantearnos cuestiones que incluso a nosotros nos supongan un reto (Rojas Soriano, 1999).

También debemos tener cuidado a la hora de atender a cada grupo de forma individual y no extendernos más de lo necesario en nuestras explicaciones ya que puede que otros grupos también tengan dudas que aclarar. Si no es así, puede que los alumnos/as tengan la sensación de que están perdiendo el tiempo y su motivación disminuya.

4.1.3. Ejemplos de estructuras cooperativas

Basándonos en lo recogido por (Goikoetxea, Edurne; Pascual, 2002), a continuación hacemos referencia a varias metodologías basadas en las pautas del aprendizaje cooperativo.

- *Aprender Juntos (Learning together)*

Este modelo fue creado por los hermanos Roger T. Johnson y David W. Johnson y es el más cercano al puro aprendizaje cooperativo.

Para llevarlo a cabo en el aula, como profesores impartiríamos una clase magistral para explicar el contenido teórico correspondiente y, en el tiempo sobrante, indicaríamos a los alumnos/as que deben trabajar en grupo para la ejecución de un trabajo. Dicho trabajo se realizaría con la ayuda de todos los integrantes del grupo y posteriormente, se calificaría.

El principal inconveniente de este modelo es que no se valora el trabajo individual de cada alumno/a, ya que no es posible conocer la contribución de cada miembro del grupo.

- *Grupo de Investigación (Group Investigation)*

Shlomo Sharan y Yael Sharan fueron los precursores de este modelo, que es muy apropiado si queremos que nuestros alumnos/as se especialicen en la ejecución de una tarea.

En nuestro aula, los estudiantes se dividirían en grupos y les asignaríamos un tema a cada grupo. Los miembros de cada grupo deberían organizarse el trabajo para investigar sobre el tema y, en el plazo que previamente estableceríamos, todos los componentes de cada grupo debería hacer una exposición oral en la que explicarían su tema frente al resto de compañeros.

En este caso, realizaríamos una evaluación general de todo el grupo y además una calificación individual para cada uno de los miembros.

- *Jigsaw*

En este modelo creado por Aronson, en lugar de impartir sesiones, dividiríamos el temario en seis partes, únicas e imprescindibles, es decir, en un puzle.

Cada miembro del grupo se encargaría de desarrollar una de esas partes y realizaría una investigación de forma individual y se reuniría con los miembros de los otros grupos que desarrollen la misma parte que él, formando lo que conocemos como “grupo de expertos”. Una vez tuvieran esa parte preparada, cada experto volvería su grupo original donde cada miembro realizaría su aportación de tal forma que todos los componentes aprendieran los contenidos de cada pieza del puzle.

Para calificar el trabajo, pondríamos un examen individual sobre el tema.

4.2. Diferencias entre metodología tradicional y aprendizaje cooperativo

Procedemos a explicar las características de una metodología cooperativa, comparándolas con las de una metodología tradicional, pudiendo así observar la gran diferencia existente entre ambas.

En las metodologías tradicionales el proceso de enseñanza-aprendizaje giraba en torno al profesor/a. En cambio, las metodologías educativas que siguen los principios de los modelos constructivistas, como es el caso del aprendizaje cooperativo, consiguen que el proceso de aprendizaje-enseñanza sea activo, es decir, que los estudiantes se sitúen en el núcleo del proceso de enseñanza-aprendizaje y el docente actúa como guía. Este trueque de papeles conlleva una modificación de las responsabilidades, recayendo una mayor responsabilidad sobre el alumno/a, comparando con las metodologías tradicionales.

También la comunicación en ambas metodologías es diferente, ya que en la metodología tradicional se realizaba de manera unidireccional, siendo el profesor el único que impartía la clase mientras los alumnos/as escuchaban (clase magistral) y en la metodología cooperativa la comunicación se realiza de forma bidireccional entre docente y alumnos/as, tomando mucha presencia las aportaciones de estos últimos. Como consecuencia, las intervenciones de los profesores ocupan menos tiempo.

En una metodología tradicional, los estudiantes trabajan de forma individual, y en ocasiones, puede que los objetivos se consigan si y sólo si los otros compañeros no lo consiguen, por lo que las relaciones entre alumnos/as se pueden basar en la competitividad. Consideramos que en el aula debe reinar un ambiente de compañerismo ya que todos los compañeros necesitarán ayuda en un momento dado y es de agradecer que la gente que te rodea y que además comparte mucho tiempo contigo, esté dispuesta a echarte una mano cuando lo necesites. Por ello, si hacemos uso de metodologías cooperativas, fomentaremos y daremos mucha importancia al trabajo realizado en equipo. De esta manera, los alumnos/as no se verán como rivales, sino como compañeros de estudio y se ayudarán mutuamente para salvar los problemas que les surjan.

Estimamos que el punto anterior es muy beneficioso para los alumnos/as ya que, hoy en día es vital que adquieran la capacidad de trabajar en equipo, de cara a su futura inclusión en el mercado laboral.

Derivado de este compañerismo, el ambiente en el aula será más relajado y mejorarán las relaciones de los alumnos/as fuera del ámbito puramente académico. Así, si llevamos a cabo una metodología cooperativa, todos los estudiantes se sentirán más integrados en el grupo-clase, porque los grupos de trabajo que formaremos serán heterogéneos y éstos favorecerán la atención a la diversidad del aula y con ellos se enriquecerá el aprendizaje. Comprenderán que la forma de pensar de todos los compañeros es importante y tiene el mismo peso independientemente de su sexo, género, procedencia, cultura, etc.

Además, en las metodologías tradicionales no hay lugar para la creatividad y originalidad de los alumnos/as. Como consecuencia, los centros educativos creaban alumnos/as cortados por el mismo patrón. Esto cambia con el aprendizaje cooperativo, con el que logramos precisamente lo contrario: fomentar la creatividad, originalidad de cada alumno/a, enriqueciendo el aula con la diversidad existente.

Finalmente, y como ya hemos indicado en apartados anteriores, el aprendizaje cooperativo fomenta el autoaprendizaje, en lugar de la pura memorización que se trabaja en la metodología tradicional. Así, los conocimientos que los alumnos/as interiorizan son más estables a medida que pasa el tiempo. Aquéllos adquiridos mediante memorización, en muchos casos, no perduran mucho tiempo más allá del examen pertinente.

A modo de resumen, hemos preparado la siguiente tabla, que recoge de forma breve los conceptos comentados anteriormente:

METODOLOGÍA TRADICIONAL (CLASE MAGISTRAL)	APRENDIZAJE COOPERATIVO
El proceso de enseñanza-aprendizaje gira en torno al profesor.	El alumno/a es el centro del proceso de enseñanza-aprendizaje.
El docente es el responsable de que los alumnos/as adquieran los conocimientos.	El alumno/a también adquiere responsabilidades en su proceso de aprendizaje.

Comunicación unidireccional (sólo interviene el profesor).	Comunicación unidireccional (intervienen tanto el profesor como los alumnos/as).
Los alumnos/as trabajan de forma individual.	Los alumnos/as trabajan en equipo y cooperando con sus compañeros.
El aprendizaje se consigue de forma individual.	El aprendizaje se logra mediante la cooperación de los compañeros.
La atención a la diversidad se trabaja a través de actividades concretas.	Se trabaja la atención a la diversidad de una manera más profunda, mediante la interacción directa entre los alumnos/as.
No fomenta la creatividad y la originalidad.	Fomenta la creatividad y la originalidad.
No fomenta el autoaprendizaje.	Fomenta el autoaprendizaje.
El aprendizaje se consigue mediante memorización.	El aprendizaje se consigue de una forma práctica.

4.3. Aplicación del aprendizaje cooperativo en matemáticas

Si preguntásemos a diferentes personas por la asignatura escolar más difícil para ellas, muchas pensarían en la asignatura de matemáticas. El hecho de que socialmente se sitúe entre las asignaturas más complicadas, aumenta la falta de aliciente de muchos alumnos/as, lo que genera que obtengan calificaciones insuficientes con frecuencia.

Así lo expresa (Santaolalla, 2009), quien afirma que, si como docentes consiguiéramos que nuestros alumnos/as disfrutasen de las matemáticas, que tengan motivación, sería visible un aumento en su rendimiento. En este punto, el aprendizaje cooperativo aporta grandes ventajas, tal y como hemos definido en el punto 4.1.1. del presente proyecto.

Al hilo de este tema se han llevado a cabo varias investigaciones, entre las que destacamos a (Davidson, Neil; Lambdin Kroll, 1991) quienes defienden que el empleo del aprendizaje cooperativo es especialmente eficaz en el aula de matemáticas, ya que mejora la comunicación matemática y el razonamiento lógico. Como ejemplo, mencionamos la resolución de problemas. En estas actividades se puede generar fácilmente un debate ya que pueden ser resueltos desde diferentes puntos de vista. En él los estudiantes podrán presentar argumentos demostrables para defender el procedimiento elegido para su resolución. Estos autores indican la posibilidad de aplicar esta metodología en todos los niveles escolares.

Otros autores, como por ejemplo (Johnson, David W., Maruyama, Geoffrey, Johnson, Roger, Nelson, Deborah, Skon, 1981) y (Pons, González-Herrero, & Serrano, 2008) estudiaron los resultados obtenidos tras la aplicación del aprendizaje cooperativo como metodología para la enseñanza de matemáticas. En dicha investigación observaron que el rendimiento de los alumnos/as mejoraba, comparado con una metodología tradicional, siendo éste más notable a la hora de comprender los conceptos más difíciles y novedosos, que es precisamente donde nuestros estudiantes presentan más problemas.

Una vez mencionamos estos ejemplos, podemos afirmar que la aplicación de esta metodología es apropiada para su aplicación en el aula de matemáticas ya que produce una mejora significativa en el rendimiento académico y muestra a los alumnos/as lo que son capaces de conseguir cuando trabajan en grupo, pudiendo llegar a dar solución a diferentes problemas o situaciones que, de una forma individual, no hubiesen conseguido resolver.

Debemos apuntar que esta metodología es trabajosa para el docente puesto que no es suficiente con usar el libro de texto que ya recoge la teoría y las actividades, sino que tenemos que preparar todas y cada una de las sesiones. No obstante, si nos ponemos en el lugar de los alumnos/as, el esfuerzo valdrá la pena.

4.4. Problemática y estrategias en la enseñanza de Límites y Continuidad

La compresión de ciertos conceptos matemáticos puede resultar complicada, como por ejemplo, el concepto de límite. Su estudio no es tarea sencilla para nuestros alumnos/as, ya que se trata de un concepto abstracto, al igual que no lo es para nosotros la preparación del material para enseñarlo.

En el presente apartado vamos a mencionar la dificultad que presentan tanto los alumnos/as como los docentes, así como varias estrategias de intervención que se pueden llevar a cabo para la enseñanza de la unidad didáctica correspondiente a *Límites y Continuidad*.

4.4.1. Propuestas centradas en los alumnos/as

Tomando como base lo recogido por (Mamona-Downs, 2001), podemos afirmar que la comprensión del concepto de límite es complejo para los estudiantes. Para ayudarles a comprenderlo, una estrategia apropiada será aquélla que comience la sesión planteando la pregunta ¿qué es para vosotros un límite? Generaremos así una lluvia de ideas en el aula en la que puedan participar todos los alumnos/as. La autora define esta actividad con el término *Regla de las cuestiones*. Esto implica el planteamiento de un debate en el aula que hace pensar a sus participantes y les invita a dar su opinión libremente. Acto seguido, emplearemos un breve espacio de tiempo para definir dicho concepto formalmente. Consideramos muy importante hacer reflexionar a los estudiantes, ya que resulta más beneficioso para su aprendizaje que indicarles directamente la respuesta correcta.

Siguiendo el hilo de esta metodología, (Blánquez, 2000), también coincide en la dificultad que tiene el estudio de este concepto para los alumnos/as y plantea como estrategias eficaces, la participación activa de los estudiantes en el aula y el uso de las nuevas tecnologías (ordenador) ya que ambas ayudan considerablemente a la comprensión del concepto de límite.

Por nuestra parte, creemos que la representación gráfica de los conceptos matemáticos (en este caso particular, las gráficas de las funciones) es muy útil para que nuestras palabras sean interpretadas por los alumnos/as de una forma más clara.

4.4.2. Propuestas centradas en los profesores/as de matemáticas

En este sub-apartado veremos la otra cara de la problemática de la docencia del *Límite y Continuidad*. El papel que desempeñamos los profesores/as.

Las autoras (Espinoza & Azcárate, 2000) determinan que, para poder comprender el papel del profesor/a, es necesario tener en cuenta dos puntos: los conocimientos matemáticos que disponga el docente y su saber-hacer como profesional.

Estamos de acuerdo con el primer punto: para ser un buen profesor de matemáticas debemos tener un conocimiento amplio de la materia. Este conocimiento hará que nuestra explicación del concepto de límite quede clara desde un principio, ya que si los alumnos/as asimilan una información errónea del concepto de límite, habremos creado un obstáculo difícil de sortear y será muy difícil para ellos superarlo para lograr comprender este concepto adecuadamente.

Por otro lado, el segundo punto es mucho más abierto ya que engloba todo lo que rodea al profesor/a, como la forma de organizar las sesiones, las explicaciones que lleva a cabo en el aula, cómo es su relación con sus estudiantes, etc. y cada profesor/a tiene unas características propias y personales.

Así, cada docente tendrá una respuesta a las siguientes preguntas: ¿qué tipo de matemáticas voy a enseñar, unas que ya estén acabadas o enseño a “hacer matemáticas”? y ¿cómo las voy a enseñar?

Como hemos indicado, la respuesta a cada una de estas preguntas es individual de cada profesor, ya que seremos cada uno de nosotros quienes definamos nuestras estrategias de enseñanza, nuestro sello profesional.

En todo caso, nuestra labor como docentes pasa por enseñar conceptos matemáticos, en este caso concreto nos referimos a límites y continuidad, y tal y como resume (Blánquez, 2000), debemos presentarlo a los alumnos/as como un concepto sencillo que pueda ser entendido fácilmente por ellos, pero a su vez debemos procurar que dicho concepto mantenga su esencia y sus propiedades.

En diversas ocasiones hemos pensado que muchos conceptos matemáticos se presentan a los alumnos/as de una manera muy teórica y formal, lo cual no ayuda a su comprensión. Como consecuencia, deben aprenderse de memoria lo que el docente le explica para, aun sin entenderlo, poder emplearlo en la resolución de los ejercicios propuestos.

Debemos detenernos en este punto y reflexionar sobre el tipo de matemáticas que queremos presentar a nuestros estudiantes y preparar todo el material necesario para llevarlo a cabo.

5. PROPUESTA DE INTERVENCIÓN DIDÁCTICA O APLICACIÓN PRÁCTICA EN EL AULA

El presente apartado recoge una propuesta de aplicación práctica en el aula de matemáticas, tomando como referencia el marco teórico y tomando en consideración lo descrito en el estado de la cuestión.

Presentamos el desarrollo de una Unidad Didáctica innovadora, que mejore la motivación de los alumnos/as de educación secundaria. Ésta incluye una breve introducción, sus objetivos, competencias y contenidos, estrategias de intervención y adaptaciones curriculares previstas, de forma que lleguemos a cada alumno/a, explicación de la metodología y las sesiones programadas para llevarla a cabo. Finalmente, podemos consultar la evaluación.

5.1. Unidad Didáctica 4º ESO. Límites de funciones. Continuidad

5.1.1. Introducción

En esta unidad didáctica haremos referencia a un concepto muy interesante desde el punto de vista del cálculo infinitesimal. Nos referimos al límite de una función en un punto.

Consideramos el desarrollo de la unidad didáctica en la Comunidad Autónoma del País Vasco. Por ello, consultamos la normativa correspondiente a esta comunidad, en concreto el *Decreto 236/2015 de 22 de diciembre, por el que se establece el currículo de Educación Básica y se implanta en la Comunidad Autónoma del País Vasco*. La unidad didáctica de “Límites de funciones” que nos ocupa, se recoge en la Tercera Parte del Decreto mencionado: Planteamiento específico del currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, apartado 2 Competencia Matemática, Bloque 4 Funciones y gráficas.

Para impartir esta unidad didáctica vamos a poner en práctica la metodología estudiada en este trabajo. Para ello, prevemos la necesidad de emplear 8 sesiones en las que enseñaremos los conceptos teóricos y se complementarán con actividades prácticas que ayuden a asimilarlos.

5.1.2. Objetivos

Los objetivos son los logros que los estudiantes deben conseguir al finalizar la etapa, como resultado final del proceso educativo programado.

Para la unidad didáctica actual, fijamos los siguientes objetivos:

1. Conocer, bien a partir de su gráfica o de su expresión algebraica, la tendencia de una función en un punto de su dominio o en el infinito.
2. Comprender la necesidad de estudio de los límites laterales de una función en un punto y entender el límite de la misma como la coincidencia de los dos laterales.
3. Estudiar y comprender el concepto de continuidad en un punto.

En la Tabla 01 podemos consultar los objetivos y la relación existente entre éstos y los contenidos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje evaluables y las competencias. Además, encontraremos una explicación más profunda de todos estos conceptos en los subapartados posteriores.

Además de estos logros académicos, prevemos que nuestros alumnos/as alcancen otros objetivos, propios del aprendizaje cooperativo y son los que siguen:

- Fomentar el aprendizaje de los alumnos/as de forma individual y también en grupo, ya que la interacción entre los propios alumnos/as y con el profesor aumenta.
- Mejorar las competencias sociales, como por ejemplo la interdependencia positiva, responsabilidad, participación, autocrítica, etc.
- Conseguir que los alumnos/as trabajen en igualdad y, de esta forma dar solución a los problemas que surgen en las aulas derivados de la diversidad existente.

Unidad Didáctica: Límites de funciones. Continuidad

Curso: 4º ESO

Tabla 01. Objetivos, contenidos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje evaluables y competencias.

Objetivo	Contenido	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	Competencias
1. Conocer, bien a partir de su gráfica o de su expresión algebraica, la tendencia de una función en un punto de su dominio o en el infinito.	▪ Interpretación gráfica del límite de una función en un punto. ▪ Cálculo de la tendencia de una función cuando la variable independiente tiende a valores muy grandes o muy pequeños.	1. Interpretar la tendencia de una función en un punto o en el infinito.	1.1. Interpreta gráficamente el límite de una función en un punto. 1.2. Calcula la tendencia de una función cuando la variable independiente tiende a valores muy grandes o muy pequeños.	CMCT CPAA CCL SIE CSC CD CEC
2. Comprender la necesidad de estudio de los límites laterales de una función en un punto y entender el límite de la misma como la coincidencia de los dos laterales.	▪ Límite de una función en un punto. ▪ Límites en el infinito. ▪ Límites finitos e infinitos de una función. ▪ Cálculo de límites. ▪ Propiedades de límites.	2. Calcular el límite de una función.	2.1. Calcula el límite de una función en un punto, tanto límites directos como indeterminaciones. 2.2. Aplica las propiedades de límites.	CMCT CPAA CCL SIE CSC CD CEC
3. Estudiar y comprender el concepto de continuidad en un punto.	▪ Determinación de la continuidad de una función en un punto. ▪ Continuidad en un intervalo. ▪ Discontinuidad. Tipos de discontinuidades.	3. Estudiar la continuidad de una función.	3.1. Estudia la continuidad de una función.	CMCT CPAA CCL SIE CSC CD CEC

5.1.3. *Competencias*

Definimos el término competencia como el “saber-hacer”, el conjunto de capacidades que constituyen la formación integral del alumnado y que le permiten poner en práctica los conocimientos adquiridos en el centro escolar.

El Sistema Educativo Español establece la existencia de 7 competencias, que denomina como Competencias Clave. Para consultarlas, podemos acudir a la normativa de referencia, actualmente la *Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato.*

A continuación definimos las competencias definidas para esta Unidad Didáctica, especificando los objetivos en los que se concreta cada una de dichas competencias:

- <u>Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)</u>: objetivos 1, 2 y 3. La competencia matemática la observaremos a lo largo de toda la unidad didáctica. El razonamiento matemático será un punto muy importante para los estudiantes, y lo trabajaremos mediante la ejecución de diferentes actividades cuya resolución les suponga un reto. Para ello, los alumnos/as deberán recurrir a los conocimientos matemáticos que ya dominan de cursos o unidades didácticas anteriores (por ejemplo, lo aprendido en la unidad anterior, funciones).
- <u>Aprender a aprender (CPAA)</u>: objetivos 1, 2 y 3. Al igual que la primera, también consideramos que esta competencia es de vital importancia. De hecho, según lo comentado en apartados anteriores, las metodologías constructivistas se fundamentan en el individuo como constructor del conocimiento y es exactamente lo que esta competencia recoge. Los alumnos/as deben aprender a aprender. Para lograrlo, enseñaremos estrategias de planificación y resolución de tareas. Por ejemplo, estudiarán la resolución de indeterminaciones de manera que sean ellos quienes piensen y deduzcan su resolución. De esta forma nuestros estudiantes serán conscientes de lo que son

capaces de conseguir y les servirá para aumentar su motivación hacia la asignatura de matemáticas.

- Comunicación lingüística (CCL): objetivos 1, 2 y 3. También esta competencia estará presente en toda la unidad didáctica. Las sesiones serán participativas y prestaremos atención a la comunicación oral de los alumnos/as y a su comunicación escrita (se evaluará en el diario de aprendizaje). También consideramos importante mencionar la nomenclatura matemática, muy presente en la ejecución de ejercicios de límites y continuidad de funciones de esta unidad didáctica.
- Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor (SIE): objetivos 1, 2 y 3. Esta competencia la trabajaremos fundamentalmente al plantear preguntas dirigidas a todo el grupo-clase. Serán los estudiantes quienes decidan intervenir en el aula para aportar su opinión o punto de vista. Nosotros reforzaremos dichas intervenciones ya que queremos potenciar que los alumnos/as sean creativos y tengan iniciativa.
- Competencias sociales y cívicas (CSC): objetivos 1, 2 y 3. Estas competencias va a estar muy presente a lo largo de todas las sesiones. Como hemos expresado, los grupos de trabajo se realizarán de forma heterogénea, precisamente para que los alumnos/as aprendan a cooperar entre ellos sin la existencia de discriminación. Además, crearemos un ambiente en el aula en el que tenga lugar el diálogo y el entendimiento, para que todas las opiniones tengan cabida. Los alumnos/as aprenderán a respetar las opiniones de sus compañeros.
- Competencia digital (CD): objetivos 1, 2 y 3. También esta competencia estará presente en la gran mayoría de las sesiones. Nos apoyaremos en programas informáticos para la representación de funciones de una forma más rápida y precisa, con lo que los alumnos/as aprenderán también el manejo de estas herramientas.
- Conciencia y expresiones culturales (CEC): objetivos 1, 2 y 3. Esta competencia se trabajará en todas las sesiones, en los momentos en los que los alumnos/as intervengan ante sus compañeros (por ejemplo, al inicio de las sesiones, para realizar un resumen de lo estudiado hasta el momento), y también en la redacción individual del diario de aprendizaje. En él podrán desarrollar su imaginación y creatividad.

5.1.4. Contenidos

Entendemos por contenidos la agrupación de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que ayudan a que los estudiantes alcancen los objetivos fijados y al logro de las competencias.

Los contenidos del Bloque 4 Funciones y gráficas están recogidos en el *Decreto 236/2015*. En dicho Decreto hemos observado una particularidad; los contenidos no se encuentran esquematizados y perfectamente diferenciados tal y como hemos comprobado tras la consulta de la normativa que corresponde a otras Comunidades Autónomas, sino que, por el contrario, están recogidos en un texto redactado. La información expresada en dicho texto es la que sigue:

- Reconocimiento y estudio de relaciones entre funciones en sus diferentes formas de representación: oral, gráfica, numérica y algebraica.

Cogiendo como base este contenido genérico que la normativa define, establecemos los siguientes contenidos para la presente Unidad Didáctica:

- Interpretación gráfica del límite de una función en un punto.
- Cálculo de la tendencia de una función cuando la variable independiente tiende a valores muy grandes o muy pequeños.
- Límite de una función en un punto.
- Límites en el infinito.
- Límites finitos e infinitos de una función.
- Cálculo de límites.
- Propiedades de límites.
- Determinación de la continuidad de una función en un punto.
- Continuidad en un intervalo.
- Discontinuidad. Tipos de discontinuidades.

5.1.5. Estrategias de intervención y adaptaciones curriculares

Con la estrategia de intervención escogida pretendemos aumentar la motivación del alumno/a para que lo aprendido en la presente unidad no se olvide rápidamente, sino que perdure en el tiempo. Para conseguirlo, en todas las sesiones potenciaremos la participación de los estudiantes y mejoraremos tanto el interés como el aprendizaje de los alumnos/as. Así, y tal y como persiguen los modelos constructivistas, el alumno/a se convierte en un sujeto que participa activamente en su proceso de aprendizaje y por supuesto, es responsable del mismo.

Consideramos importante que los alumnos/as perciban comprensión, interés, cercanía y preocupación por parte del profesor. Para poder cumplirlo, como docentes, nos dirigiremos a todos nuestros estudiantes con frecuencia.

Cuando debamos transmitir instrucciones, lo haremos en voz alta, de forma clara y concisa para que todos los alumnos/as puedan desarrollar las tareas adecuadamente. Si en el aula existe algún alumno/a con necesidades especiales, adaptaremos la transmisión de dichas instrucciones para que éste pueda realizar el trabajo con normalidad.

Es importante conocer las características de cada alumno/a, para poder atender las necesidades de cada uno de ellos y asegurar el aprendizaje de todos los integrantes del grupo-clase.

5.1.6. Metodología

La metodología que utilizaremos para impartir esta unidad didáctica está fundamentada en lo establecido en la *Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.*

Basaremos la metodología de la presente unidad didáctica en los modelos constructivistas del aprendizaje, que comprenden al alumno/a como constructor de su propio conocimiento. Con el fin de llevarla a cabo, ayudaremos a los estudiantes a crear relaciones entre los conceptos que ya han estudiado y los nuevos que van a estudiar. Así, la motivación de los alumnos/as mejora, porque los conocimientos adquiridos se conservan en el tiempo y, por consiguiente, los podrán emplear en el futuro.

Consideramos que todo detalle de la práctica docente es de gran importancia para el desarrollo eficaz de la Unidad didáctica.

Antes de comenzar cada una de las sesiones programadas, asistiremos al centro educativo con tiempo suficiente para revisar la sesión correspondiente, si disponemos del material necesario para llevarla a cabo, etc. De la misma manera, acudiremos a la clase con antelación suficiente para recibir a los alumnos/as de forma tranquila y ordenada.

La metodología que aplicaremos en el aula es el aprendizaje cooperativo, por lo que debemos organizar los pupitres a tal efecto. Los alumnos/as se distribuirán en grupos de 4 personas, elegidos previamente por nosotros. Procuraremos que todos los grupos estén configurados de forma heterogénea, de forma que estén integrados por diferentes perfiles de estudiantes. Así aprenderán el valor de la igualdad como personas.

Tendremos en cuenta la situación de cada uno de los pupitres, de forma que no existan obstáculos que impidan el paso libre entre grupos de trabajo y que todos los alumnos/as puedan ver la pizarra desde su sitio.

Todas las sesiones previstas para el desarrollo de la presente unidad didáctica dispondrán de una estructura similar. De esta manera aportaremos seguridad y mejoraremos la predisposición hacia la tarea. Además, conseguiremos que los alumnos/as lo realicen de forma sistemática.

Al inicio de cada sesión dedicaremos un tiempo breve a hacer un pequeño repaso de los nuevos conceptos estudiados en la unidad hasta el momento. Así ayudaremos a que los estudiantes se sitúen en la unidad. Posteriormente, explicaremos en voz alta lo que se va a trabajar en la sesión actual.

El cuerpo de las sesiones lo usaremos para las explicaciones de los conceptos teóricos fundamentales y para ello, haremos uso de la pizarra existente en el aula. Para ello, emplearemos la clase magistral como metodología. Procuraremos que estas explicaciones sean breves, no superando los 20 minutos, para evitar que los alumnos/as pierdan la motivación. Además, durante las explicaciones animaremos a la participación de los alumnos/as para que éstos formen parte de su proceso educativo.

Con el fin de ayudar a afianzar los conceptos aprendidos, complementaremos las explicaciones con ejercicios que los alumnos/as realizarán cada día. Prevemos la ejecución de estos ejercicios mediante aprendizaje cooperativo, es decir, en grupos de 4 personas, teniendo cada una de esas personas un rol que desempeñar. La distribución de roles que planteamos es la siguiente:

1- Explica el ejercicio a sus compañeros y, fundamentándose en la teoría aprendida, plantea el desarrollo del mismo.

2- Desarrolla los pasos a seguir para resolver el ejercicio.
3- Realiza las cuentas necesarias con la calculadora o mentalmente.
4- Realiza labores de portavoz del grupo, transmitiendo a los demás grupos el desarrollo del ejercicio si es necesario, realiza la lista de dudas, conclusiones, etc.

Durante el transcurso de cada sesión, tendremos en cuenta la planificación previamente establecida, siendo ésta flexible. Nosotros estimaremos esta flexibilidad, de forma que podamos aprovechar aquéllas situaciones o circunstancias que puedan surgir en el aula y que favorezcan el aprendizaje.

Nosotros nos ocuparemos de llevar el ritmo de la clase y una dinámica de trabajo adecuada. Debemos liderar las sesiones y gestionar el tiempo de forma acertada.

Durante las tareas, velaremos porque el nivel de ruido existente sea adecuado para tal fin. Enseñaremos a los estudiantes la importancia de trabajar sin molestar a los compañeros. A la hora de dirigirnos a los alumnos/as, mantendremos la calma y transmitiremos el mensaje de forma precisa y respetando las normas del lenguaje. En ningún caso alzaremos la voz.

Trabajaremos para que en el aula reine un ambiente de respeto y confianza entre los alumnos/as y entre alumnos/as y nosotros. Haremos cumplir las normas de convivencias establecidas por el centro educativo.

Al finalizar la sesión, dedicaremos los últimos minutos a repasar de forma breve lo aprendido durante dicha sesión. Aprovecharemos para reflexionar sobre el trabajo realizado y, en caso de que sea oportuno, felicitaremos a los alumnos/as por el trabajo realizado. Esto les animará de cara a la próxima sesión.

5.1.7. Actividades

A continuación recogemos las 8 sesiones que prevemos para impartir la presente Unidad Didáctica. Podemos consultar las actividades y exámenes referenciados en el Apartado ANEXOS, en la parte posterior de este proyecto.

- **SESIÓN 1**

Objetivo de la sesión

En esta sesión trabajaremos los objetivos 1 y 2, que persiguen que los alumnos/as sean capaces de interpretar la tendencia de una función en un punto o en el infinito y calcular el límite de una función. En esta primera sesión llevaremos a cabo la introducción del concepto de límite de una función en un punto.

Desarrollo de la sesión

Dedicaremos los primeros minutos de la sesión a crear un pequeño debate planteando las siguientes preguntas:

- ¿Cómo puedo saber hacia qué valor se aproxima una función?
- ¿Y si la x toma valores muy grandes o muy pequeños?

Nuestro objetivo es conseguir que los alumnos/as reflexionen sobre estas preguntas y comprenderán la importancia que la herramienta que van a estudiar en esta Unidad Didáctica tiene para el estudio del cálculo infinitesimal.

Daremos paso a todos los alumnos/as que quieran compartir su punto de vista y, una vez recogidas y comentadas todas las opiniones, anunciaremos la introducción al concepto de límite.

A continuación, emplearemos la clase magistral para introducir brevemente el concepto de límite usando como ejemplos funciones representadas gráficamente y analíticamente. Podemos valernos de programas informáticos (por ejemplo GeoGebra) para que la representación sea más precisa y veraz. Aprovecharemos que en el tema anterior han visto funciones para poner como ejemplo las siguientes actividades:

ANEXO 01- SESIÓN 1- ACTIVIDAD 1
ANEXO 01- SESIÓN 1- ACTIVIDAD 2

En estas primeras actividades hemos recogido dos gráficas sencillas, fácilmente reconocibles por todos los alumnos/as, que les ayudarán a comprender el concepto de límite. Además de la expresión escrita para referirnos al límite, hemos usado la nomenclatura matemática para que se vayan acostumbrando a verla y poco a poco, a usarla.

Continuaremos la sesión haciendo que los alumnos/as trabajen en grupos cooperativos con intención de afianzar lo aprendido. Para ello, mandaremos hacer los siguientes ejercicios:

ANEXO 01- SESIÓN 1- ACTIVIDAD 3

Consideramos que estos ejercicios son apropiados para ayudar a que nuestros alumnos/as, que únicamente tienen una idea inicial del concepto de límite de una función en un punto, pero que aún no lo tienen muy claro, vayan familiarizándose con él.

- **SESIÓN 2**

Objetivo de la sesión

En esta sesión trabajaremos los objetivos 1 y 2, que buscan que los alumnos/as sean capaces de interpretar la tendencia de una función en un punto o en el infinito y calcular el límite de una función. En esta segunda sesión nos centraremos en el estudio de los límites laterales y el límite infinito.

Desarrollo de la sesión

Comenzaremos esta segunda sesión, dedicando los primeros minutos al repaso de lo visto en la primera sesión y a la resolución de dudas. Para ello, invitaremos a que sean los propios alumnos/as quienes salgan a la pizarra y expliquen a sus compañeros los conceptos aprendidos hasta el momento y despejen sus dudas.

Acto seguido indicaremos a los alumnos/as que vamos a dividir la sesión en dos partes.

En la primera parte, y a través de la clase magistral, realizaremos una breve explicación teórica sobre límites laterales, relacionándolo con lo estudiado en la sesión anterior para mejorar la comprensión. Los alumnos/as trabajarán de forma cooperativa para resolver los siguientes ejercicios:

ANEXO 01- SESIÓN 2- ACTIVIDAD 1

En esta actividad hemos previsto 4 ejercicios en los que los alumnos/as pondrán en práctica lo que acabamos de explicar en el aula. Con ellos, reforzarán las ideas que han adquirido desde una perspectiva analítica y gráfica.

En la segunda parte de la clase, plantearemos a los alumnos/as la resolución de la siguiente actividad para introducir el concepto siguiente:

ANEXO 01- SESIÓN 2- ACTIVIDAD 2

En esta actividad también hemos representado una gráfica sencilla para facilitar la comprensión de los alumnos/as. Al igual que en la primera sesión, utilizamos tanto la escritura como la nomenclatura matemática para hacer referencia al límite de una función en un punto, para ayudar a los alumnos/as a familiarizarse con ella.

Siguiendo la misma metodología que el concepto anterior, realizaremos una corta explicación teórica sobre el límite infinito. De la misma forma, los alumnos/as harán los siguientes ejercicios:

ANEXO 01- SESIÓN 2- ACTIVIDAD 3

Con los ejercicios que hemos planteado en esta actividad conseguiremos que los alumnos/as afiancen el concepto de límite así como mejorar su comprensión de los límites laterales y del límite infinito.

- **SESIÓN 3**

Objetivo de la sesión

En esta sesión trabajaremos los objetivos 1 y 2, dicho de otra manera, buscaremos que los alumnos/as sean capaces de interpretar la tendencia de una función en un punto o en el infinito así como calcular el límite de una función. En esta ocasión emplearemos la sesión a estudiar el límite en el infinito y las propiedades de los límites.

Desarrollo de la sesión

Los primeros minutos de esta sesión los invertiremos en guiar a los alumnos/as a través de un repaso por los conceptos vistos en la sesión anterior y también serán los propios estudiantes quienes aclaren las dudas de sus compañeros, en el caso de que las hubiera.

Acto seguido, indicaremos que la sesión actual se dividirá en dos partes.

En la primera, y como introducción al concepto de límite en el infinito, plantearemos la siguiente actividad, para resolver con los alumnos/as de forma participativa en el aula:

ANEXO 01- SESIÓN 3- ACTIVIDAD 1

En esta actividad hemos usado la misma gráfica que en la Actividad 2 de la sesión anterior para hacerles ver que, en una misma gráfica, podemos estudiar varios límites. También en esta ocasión empleamos la expresión escrita y la nomenclatura matemática.

Una vez comprendida, y de forma magistral, llevaremos a cabo una breve explicación teórica sobre el concepto de límite en el infinito, tomando como base lo aprendido en sesiones anteriores para facilitar su comprensión.

Acto seguido, indicaremos los siguientes ejercicios para afianzar, que serán realizados por grupos de forma cooperativa:

ANEXO 01- SESIÓN 3- ACTIVIDAD 2

Hemos recogido multitud de límites para que los alumnos/as los calculen y así consigan soltura a la vez que fomentamos en entendimiento del nuevo concepto (límite en el infinito).

Por otro lado, y siguiendo la misma metodología que en la primera parte de la sesión, en la segunda parte, realizaremos una explicación teórica sobre las propiedades de los límites.

Para finalizar, los alumnos/as desarrollarán estos ejercicios.

ANEXO 01- SESIÓN 3- ACTIVIDAD 3

Con los ejercicios de esta actividad queremos ayudar a los estudiantes a poner en práctica las propiedades de los límites. Tras su realización comprenderán la aplicación de la teoría vista en la sesión actual.

- **SESIÓN 4**

Objetivo de la sesión

En la cuarta sesión, trabajaremos los objetivos 1 y 2, que persiguen que los alumnos/as sean capaces de interpretar la tendencia de una función en un punto o en el infinito así como calcular el límite de una función. En este caso, nos centraremos en la resolución de dos tipos de indeterminaciones.

Desarrollo de la sesión

Al igual que las sesiones anteriores, animaremos a los alumnos/as a participar en un rápido repaso de los conceptos aprendidos en la unidad didáctica. Además, serán los mismos estudiantes quienes resuelvan las dudas que sus compañeros puedan tener.

Posteriormente, y como introducción al siguiente concepto, propondremos la siguiente actividad para que sea resuelta gracias a la participación de todo el grupo-clase:

ANEXO 1- SESIÓN 4- ACTIVIDAD 1

Los alumnos/as ya saben resolver límites inmediatos. Para poner a prueba sus conocimientos, proponemos la actividad 1, en la que encontrarán un límite que no pueden resolver. Crearemos un pequeño debate para escuchar todas las aportaciones y razonamientos de los estudiantes.

Acto seguido, explicaremos esta indeterminación desde un punto de vista teórico, empleando la clase magistral.

En segundo lugar, y también buscando la participación de toda la clase para la realización de la misma, planteamos la siguiente actividad para introducir el segundo tipo de indeterminaciones:

ANEXO 1- SESIÓN 4- ACTIVIDAD 2

El objetivo que buscamos con esta actividad es el mismo que el de la actividad 1. En este caso, los alumnos/as reaccionarán de otra manera, puesto que ya han visto que pueden surgir problemas a la hora de resolver límites y el debate se inclinará hacia el tratamiento del infinito.

Acto seguido, utilizaremos la clase magistral para llevar a cabo una corta explicación teórica sobre la nueva indeterminación.

Por último, mandaremos la ejecución de varios ejercicios que ayudarán a asentar los conceptos adquiridos en la presente sesión. Los alumnos/as trabajarán en grupos cooperativos.

ANEXO 1- SESIÓN 4- ACTIVIDAD 3

Los ejercicios que hemos propuesto para esta actividad mejorarán la comprensión de los alumnos/as hacia los dos tipos de indeterminaciones vistas en esta sesión.

- **SESIÓN 5**

Objetivo de la sesión

En esta sesión trabajaremos los objetivos 1 y 2, que buscan que los alumnos/as sean capaces de interpretar la tendencia de una función en un punto o en el infinito así como calcular el límite de una función. Reflejado de una forma más específica, explicaremos la resolución de dos tipos de indeterminaciones.

Desarrollo de la sesión

Iniciaremos esta sesión repasando brevemente todo lo aprendido hasta el momento para que los alumnos/as puedan asimilar las explicaciones posteriores con mayor facilidad. En la medida de lo posible dejaremos que sean los alumnos/as quienes realicen este repaso, interviniendo únicamente para guiarlos. También aprovecharemos para resolver las posibles dudas que los estudiantes tengan. Así mismo, intentaremos que los propios compañeros salgan a la pizarra para solucionar dichas dudas.

A continuación, planteamos la siguiente actividad, que pretenderemos que se resuelta mediante la intervención de los alumnos/as en el aula:

ANEXO 1- SESIÓN 5- ACTIVIDAD 1

Queremos que con esta actividad se genere un pequeño debate, en el que sean los propios alumnos/as quienes deduzcan el procedimiento para la resolución de esta indeterminación.

Seguidamente, realizaremos una explicación magistral y teórica en la pizarra, para aclarar completamente la teoría sobre esta indeterminación.

En segundo lugar, propondremos la siguiente actividad para introducir el segundo tipo de indeterminaciones, (de la misma forma, animaremos a la participación de los alumnos/as para resolverla):

ANEXO 1- SESIÓN 5- ACTIVIDAD 2

Con la actividad 2 queremos que los alumnos/as reflexionen sobre la posible resolución de esta indeterminación. En este caso no les va a resultar tan fácil como en los casos anteriores, pero podemos guiarles para que descubran el camino correcto.

También en este caso, una vez finalizada la actividad, emplearemos la clase magistral para realizar una explicación teórica sobre este tipo de indeterminaciones.

Para finalizar, indicaremos la realización de varios ejercicios a través de grupos cooperativos:

ANEXO 1- SESIÓN 5- ACTIVIDAD 3

En esta actividad 3 hemos recogido varios ejercicios para conseguir que los estudiantes asimilen los dos tipos de indeterminaciones aprendidos en la presente sesión.

- **SESIÓN 6**

Objetivo de la sesión

En esta sesión trabajaremos el objetivo 3, es decir, perseguiremos que los alumnos/as sean capaces de estudiar y comprender el concepto de continuidad en un punto. Para ello, estudiaremos de la continuidad de una función.

Desarrollo de la sesión

Comenzaremos la sexta sesión realizando un breve repaso de lo anterior y resolviendo las dudas pertinentes. Todo ello, se realizará mediante intervenciones de los alumnos/as.

Seguiremos la sesión empleando la clase magistral para exponer la continuidad de funciones, así como los distintos tipos de discontinuidades.

Complementaremos la explicación teórica con los siguientes ejercicios, que serán realizados por los alumnos/as, mediante el trabajo en grupos cooperativos:

ANEXO 1- SESIÓN 6- ACTIVIDAD 1

Con los ejercicios que hemos recogido en esta actividad queremos mejorar la habilidad del estudio de la continuidad de una función.

- **SESIÓN 7**

Objetivo de la sesión

En esta sesión trabajaremos todos los objetivos, es decir, los objetivos 1, 2 y 3. Emplearemos todo el tiempo que esta sesión ocupa a realizar ejercicios referentes a todo lo estudiado en la presente unidad didáctica, de forma que sirva como repaso y preparación para el examen que tendrá lugar en la próxima sesión.

Desarrollo de la sesión

Iniciaremos la sesión animando a la participación de los alumnos/as para realizar un breve repaso de todo lo visto hasta el momento y concederemos un tiempo a los alumnos/as para que planteen las dudas que les hayan surgido hasta el momento. De la misma forma, se buscará que sean los propios estudiantes quienes salgan a la pizarra y resuelvan las dudas de sus compañeros.

A continuación, entregaremos la siguiente hoja de ejercicios con el fin de que los alumnos/as trabajen durante la sesión. Estos ejercicios se realizarán en grupos cooperativos.

ANEXO 01- SESIÓN 7- ACTIVIDADES REPASO

Con estas actividades de repaso queremos mejorar la agilidad de los alumnos/as para la resolución de indeterminaciones, de manera que el día del examen sean capaces de solucionarlas sin problema.

- **SESIÓN 8**

Dedicamos la octava sesión a realizar la prueba escrita en la que los alumnos/as mostrarán los conocimientos adquiridos en esta unidad didáctica. Adjuntamos el examen mencionado.

ANEXO 01- SESIÓN 8- EXAMEN

- **SESIÓN 9**

El tiempo que ocupa la última sesión, lo dedicaremos a corregir los ejercicios que conforman el examen realizado en la sesión anterior. También en esta ocasión trataremos de que los propios alumnos/as salgan a la pizarra a resolver los diferentes ejercicios que componen el examen y expliquen al resto de compañeros cada uno de los pasos que dan para, finalmente, obtener el resultado final.

Consideramos que, aunque el alumno/a supere la asignatura, es fundamental que conozca el desarrollo correcto de todos los ejercicios. Esta dinámica le ayudará a reforzar los conocimientos que ya domina; y en el caso de que no haya conseguido llegar al mínimo establecido, a entender por qué no ha resuelto de manera acertada lo que pedíamos en dicha prueba escrita.

5.1.8. Evaluación

El objetivo de la evaluación, es recoger información sobre los logros que cada uno de los estudiantes ha alcanzado en la presente unidad didáctica. Evaluaremos los aprendizajes del alumno/a según las competencias y considerando los criterios de evaluación. Los conceptos para evaluar la unidad didáctica son los siguientes:

- Examen escrito: supondrá el 40 % de la calificación. En la sesión 8, los alumnos/as realizarán un examen parcial que puntuará de 1 a 10, especificándose en cada una de las cuestiones su valor. Podemos consultar la rúbrica para la corrección del examen escrito en la Tabla 02.
- Diario de aprendizaje: tendrá un peso del 30 % de la nota. En este diario, los alumnos/as reflejarán lo aprendido en cada una de las sesiones, incluyendo una reflexión sobre lo trabajado en la unidad didáctica. La rúbrica correspondiente al diario de aprendizaje la recogemos en la Tabla 03.
- Actitud en clase: su valor será del 30 % restante. Valoraremos la actitud en clase, la relación de los estudiantes con sus compañeros y con el profesor, la predisposición hacia las tareas, la participación en las clases, etc. La actitud en clase la calificaremos siguiendo la rúbrica recogida en la Tabla 04.

Tabla 02. Unidad Didáctica 4º ESO. Límites de funciones. Continuidad. Rúbrica para examen escrito

Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	NIVEL DE DESEMPEÑO DEL ALUMNO/A			
		Lo consigue	**No totalmente**	**Bajo**	**Muy bajo**
1. Interpretar la tendencia de una función en un punto o en el infinito.	1.1. Interpreta gráficamente el límite de una función en un punto.	Interpreta gráficamente correctamente, en todos los casos, el límite de una función en un punto.	Interpreta gráficamente correctamente, en la mayoría de los casos, el límite de una función en un punto.	Tiene dificultades para interpretar gráficamente el límite de una función en un punto.	No es capaz de interpretar gráficamente el límite de una función en un punto.
	1.2. Calcula la tendencia de una función cuando la variable independiente tiende a valores muy grandes o muy pequeños.	Calcula de forma correcta y en todos los casos, la tendencia de una función cuando la variable independiente tiende a valores muy grandes o muy pequeños.	Calcula correctamente en la mayoría de los casos, la tendencia de una función cuando la variable independiente tiende a valores muy grandes o muy pequeños.	Presenta dificultades para calcular la tendencia de una función cuando la variable independiente tiende a valores muy grandes o muy pequeños.	No sabe de calcular la tendencia de una función cuando la variable independiente tiende a valores muy grandes o muy pequeños.
2. Calcular el límite de una función.	2.1. Calcula el límite de una función en un punto, tanto límites directos como indeterminaciones.	Calcula correctamente, en todos los casos, el límite de una función en un punto, tanto límites directos como indeterminaciones.	Calcula correctamente, en la mayoría de los casos, el límite de una función en un punto, tanto límites directos como indeterminaciones.	Calcula con dificultad el límite de una función en un punto, tanto límites directos como indeterminaciones.	No calcula el límite de una función en un punto, tanto límites directos como indeterminaciones.
	2.2. Aplica las propiedades de límites.	Aplica correctamente y en todos los casos, las propiedades de límites.	Aplica correctamente y en la mayor parte de los casos, las propiedades de límites.	Tiene dificultades para aplicar las propiedades de límites.	No es capaz de aplicar las propiedades de límites.
3. Estudiar la continuidad de una función.	3.2. Estudia la continuidad de una función.	Estudia de forma correcta y en todos los casos, la continuidad de una función.	Estudia de forma correcta y en la mayoría de los casos, la continuidad de una función.	Presenta dificultades para estudiar la continuidad de una función.	No sabe estudiar la continuidad de una función.

Tabla 03. Unidad Didáctica 4º ESO. Límites de funciones. Continuidad. Rúbrica para diario de aprendizaje

Criterios de evaluación	**NIVEL DE DESEMPEÑO DEL ALUMNO/A**			
	Lo consigue	**No totalmente**	**Bajo**	**Muy bajo**
Presentación	El diario se presenta con una muy correcta presentación en cuanto a limpieza y claridad.	El diario se presenta con una correcta presentación, refiriéndonos a limpieza y claridad.	El alumno/a presenta el diario con una presentación poco correcta, en lo que a limpieza y claridad se refiere.	La presentación del diario se realiza de una forma incorrecta, en cuanto a limpieza y claridad.
Ortografía	El alumno/a presenta el diario con muy buena letra y sin faltas de ortografía.	El diario se ha escrito con letra clara y con pocas faltas de ortografía.	El alumno/a tiene una letra difícil de interpretar y presenta varias faltas de ortografía.	El alumno/a presenta el diario con una letra ilegible y además múltiples faltas ortográficas.
Organización	El contenido del diario está organizado cronológicamente.	La mayoría del contenido está ordenado cronológicamente, y también existe alguna parte desordenada.	El diario recoge varias partes desordenadas.	El diario presentado está completamente desordenado.
Contenido	El diario recoge todo el contenido visto en clase, actividades propuestas y reflexiones personales del alumno/a.	El diario comprende casi todo el contenido visto en clase, así como las actividades propuestas. Además recoge alguna reflexión realizada por el alumno/a.	Se aprecia gran falta del contenido visto en clase, así como actividades. Además recoge pocas o ninguna reflexión redactada por parte del alumno/a.	El diario apenas recoge el contenido visto en clase, actividades y reflexiones del alumno/a.
Autocorrección	Todas las actividades se encuentran perfectamente corregidas.	El alumno/a ha corregido casi todas las actividades.	Sólo se han corregido algunas de las actividades.	El alumno/a no ha corregido ninguna de las actividades.

Tabla 04. Unidad Didáctica 4º ESO. Límites de funciones. Continuidad. Rúbrica para actitud en clase

Criterios de evaluación	**NIVEL DE DESEMPEÑO DEL ALUMNO/A**			
	Lo consigue	**No totalmente**	**Bajo**	**Muy bajo**
Asistencia	El alumno/a asiste a todas las clases con puntualidad y permanece en ella durante toda la sesión.	El alumno/a asiste a casi todas las clases (80-99%) con un retraso máximo de 2 minutos y las distracciones que experimenta son poco duraderas.	El alumno/a asiste a pocas clases (60-79%) con un retraso de hasta 5 minutos y ocasionalmente pide salir del aula.	El alumno/a presenta un porcentaje de asistencia muy bajo (59% o menos) con un retraso de más de 5 minutos y además solicita salir del aula con frecuencia.
Comportamiento y disciplina	El comportamiento hacia el profesor y sus compañeros es correcto.	El comportamiento es adecuado en la mayoría de ocasiones.	No se comporta de manera correcta, pero al llamarle la atención, el alumno/a corrige su forma de actuar.	El alumno/a no tiene un comportamiento adecuado y además hace caso omiso a las indicaciones del profesor.
Participación en clase	El alumno/a se muestra participativo en las clases.	El alumno/a es participativo, aunque en ocasiones se encuentra despistado. Aun así, sigue el ritmo de la clase.	El alumno/a apenas participa en clase y en varias ocasiones pierde el ritmo de la clase.	El alumno/a no participa en clase y no sigue el ritmo de la clase.
Colaboración y ayuda a sus compañeros	Al realizar tareas en grupo, colabora con ellos para sacar la tarea adelante y ayuda a los compañeros con dificultades.	La mayor parte de las veces que trabaja en grupo colabora con sus compañeros y, si algún compañero necesita ayuda, casi siempre le ayuda.	Pocas veces colabora cuando se trabaja en grupo y no suele estar dispuesto a ayudar a los compañeros que lo necesitan.	Nunca presenta actitud colaborativa en trabajos en grupos y no presta su ayuda a compañeros que lo necesitan.
Limpieza	Mantiene su lugar de trabajo en orden y limpieza necesarias para el correcto estudio.	Su pupitre está bastante bien ordenado y no presenta dificultades para trabajar.	Su lugar de trabajo se encuentra bastante desordenado y dificulta el estudio del alumno/a.	El pupitre del alumno/a no reúne condiciones para el estudio. Éste se encuentra desordenado, impidiendo completamente la actividad del alumno/a.

6. DISCUSIÓN

En este apartado llevaremos a cabo una argumentación acerca de la viabilidad de la intervención didáctica propuesta, incluyendo sus ventajas e inconvenientes, así como una mención de los beneficios que se pueden lograr.

En primer lugar, nos gustaría comentar que hemos previsto una aplicación práctica para llevarla a cabo en un aula de secundaria (concretamente en 4º de ESO), pero que podríamos aplicarla en cualquier curso de Educación Secundaria, Bachillerato e incluso Educación Primaria.

Como ya hemos comentado en apartados anteriores, las principales ventajas que esta propuesta conlleva, son las siguientes:

- Lograr que los alumnos/as aprendan matemáticas a través de la adquisición de conocimientos que perduren en el tiempo.
- Fomentar la motivación de los estudiantes respecto a la asignatura de matemáticas.
- Mejorar el rendimiento académico de los alumnos/as.
- Enriquecer las relaciones socio-afectivas entre iguales.
- Promover la educación en valores, tales como la igualdad, solidaridad, integración, confianza, etc.
- Impulsar la participación de los estudiantes en el aula.
- Conseguir que los alumnos/as comprendan la importancia de su trabajo y el de sus compañeros para la realización de las tareas.
- Fomentar las interacciones cara a cara, que los alumnos/as pierdan el miedo a hablar con sus compañeros, a expresar sus opiniones sin miedo al qué dirán, a respetar las opiniones de sus compañeros aunque no las compartan, etc.

Además de estas ventajas, también ponemos de manifiesto la existencia de varios inconvenientes:

- Al tratarse de una metodología cooperativa, se fomenta una mayor participación e involucración de los alumnos/as, por lo que las intervenciones en el aula serán frecuentes. Esto conlleva la posibilidad de que dichas participaciones ocupen mucho tiempo dentro de nuestras sesiones y no dispongamos de tiempo para llevar a cabo las explicaciones y actividades que tenemos programadas. Para dar solución a este inconveniente, planteamos que, como docentes, debemos llevar a cabo una correcta gestión del tiempo.

Puntualmente, podemos prolongar la discusión de algún tema que consideremos de interés para nuestros alumnos/as, pero debemos cuidar los tiempos para cumplir con la programación establecida.

- Los alumnos/as reflexionarán de una forma más profunda sobre los conceptos que se estén aprendiendo. Por ello, plantearán sus dudas e inquietudes y, en algún caso, puede que nos suponga un reto darles una respuesta clara. En primer lugar nos gustaría aclarar que es perfecto que los alumnos/as tengan inquietudes y curiosidad por el conocimiento y si nos plantean un reto que no podemos resolver, significará que hemos conseguido uno de nuestros objetivos. Como solución, indicamos que, en el caso de que no seamos capaces de dar respuesta a una pregunta de un alumno/a, debemos indicarles la realidad: expresaremos que es una buena pregunta (en el caso de que así lo consideremos) y que no disponemos de una respuesta concreta. Si lo consideramos conveniente, podemos añadir que, lo investigaremos para la próxima sesión, o indicar al alumno/a que, si desea ahondar en ese tema en concreto, puede dirigirse a ciertas revistas, páginas de internet, estudios superiores, etc.
- Debemos prestar atención a cada grupo de forma individual, pero sin demorarnos en el tiempo, ya que podríamos desmotivar al resto de grupos. Al igual que hemos comentado en el primer punto, la solución a este inconvenientes pasa por realizar una correcta gestión del tiempo. Debemos establecer unos tiempos para atender a cada grupo, pudiendo prolongarse si observamos que los demás grupos están trabajando con normalidad y no precisan nuestra ayuda.

Por otro lado, podemos encontrar varias limitaciones derivadas de la puesta en práctica de esta metodología, principalmente si no estamos familiarizados con ella.

- Un aspecto importante es la experiencia que tanto nosotros como docentes, como nuestros alumnos/as tengan sobre el aprendizaje cooperativo, ya que ésta indicará el ritmo de la clase así como su fluidez. La falta de fluidez puede conllevar la necesidad de utilizar más sesiones para impartir la unidad didáctica. Seremos conscientes que las primeras sesiones puede que no resulten tal y como nos las imaginamos, pero con tiempo y sobre todo, con paciencia, adquiriremos la experiencia necesaria para llevarlas a cabo de una forma fluida.
- Por otro lado, debemos tener en cuenta nuestra destreza como profesores. Debemos sentirnos cómodos empleando esta metodología y lo conseguiremos con la experiencia y también con una buena actitud. Si presentamos una actitud positiva, optimista, implicada y con ganas de enseñar a nuestros alumnos/as, seguramente nuestros resultados sean satisfactorios.

El principal beneficio que los alumnos/as experimentarán es el aumento de la motivación hacia la asignatura de matemáticas. Dejarán de pensar que “las matemáticas son demasiado difíciles” o que ellos “no valen para estudiar matemáticas”. Comprenderán que, cuando se reflexiona sobre un tema y se entiende por qué se hace de una forma y no de otra, todo adquiere un sentido.

Además, tras la aplicación práctica de la unidad didáctica que proponemos en el presente proyecto de innovación, los alumnos/as de 4º ESO no sólo aprenderán los conceptos relativos a la unidad didáctica de límites de funciones, sino que además habrán razonado y comprendido cada uno de los contenidos de la unidad, de tal forma que, junto con lo aprendido en unidades anteriores, formarán una base sólida para sus estudios futuros. En el caso de que no continúen estudiando, las competencias adquiridas les permitirán interactuar con el mundo que les rodea y resolver los problemas que éste les proponga.

También adquirirán diversas competencias, como lo son la competencia matemática, aprender a aprender y el sentido de la iniciativa. Gracias a ellas, el alumno/a será una persona más activa en su aprendizaje y ya no actuará como un mero espectador, sino que dará el paso a involucrarse y tener inquietudes sobre lo que se trabaja en el aula.

De la misma forma, aprenderá ciertos valores, como por ejemplo solidaridad, igualdad, integración, etc. Éstos se adquirirán trabajando de forma cooperativa con sus compañeros. El alumno/a entenderá la importancia del trabajo de todos los integrantes del grupo para que el trabajo realizado obtenga un buen resultado y se preocupará por ayudar a sus compañeros en el caso de que ellos lo necesiten. Consideramos especialmente valioso que nuestros alumnos/as aprendan a cooperar con sus compañeros, que tengan la capacidad de trabajar en equipo, ya que el día de mañana, cuando se encuentren en el mercado laboral, observarán que en la gran mayoría de puestos de trabajo a los que optarán, se les pedirá que trabajen junto a un equipo humano.

Como docentes, nos aseguraremos de que en el aula reine un ambiente de confianza y entendimiento, donde las opiniones de todos los alumnos/as son bienvenidas. Así, los alumnos/as serán más participativos y poco a poco perderán el miedo a hablar en público.

7. CONCLUSIONES

Cuando comenzamos estos estudios de Máster, teníamos múltiples expectativas, entre otras llegar a ser capaces de impartir una unidad didáctica a un grupo-clase y que los alumnos/as que tuviésemos adquiriesen los conocimientos que nosotros les enseñábamos.

Con el curso de las diferentes asignaturas que componen el estudio del presente máster, hemos comprendido de una forma muy profunda el funcionamiento de un centro educativo, hemos aprendido unos conceptos imprescindibles sobre psicología y conducta de los adolescentes y cómo no, hemos estudiado diferentes metodologías de enseñanza para poner en práctica en las clases.

Por si esto fuera poco, hemos podido poner en práctica todo este conocimiento teórico, a través de la asignatura *Prácticum en la especialidad de matemáticas*. El hecho de poder estar impartiendo clase ha sido una experiencia preciosa y muy instructiva, ya que hemos podido observar el comportamiento de los alumnos/as, así como analizar sus carencias y puntos que debemos reforzar. También nos ha servido para hacer una crítica sobre nuestra forma de enseñar.

Así, hemos llegado a la conclusión de que existe una necesidad de cambiar la metodología tradicional, en la que el alumno/a se siente forzado a estudiar, por otras metodologías que promuevan la participación del alumno/a, la interacción y comunicación, el apoyo entre compañeros y, en definitiva, que mejore la motivación de éstos hacia la asignatura de matemáticas.

En este TFM recogemos la aplicación de aprendizaje cooperativo como metodología para alcanzar los objetivos que hemos mencionado. Esta metodología la combinaremos puntualmente con la clase magistral, cuando sea necesario realizar una explicación importante. Al no predominar estas explicaciones, conseguiremos captar la atención de los alumnos/as, con lo cual, las explicaciones serán efectivas.

El tutor de prácticas que hemos tenido en el centro educativo fue, hace varios años, nuestro profesor de matemáticas. Nosotros lo considerábamos un profesor duro gracias al cual tomamos conciencia de multitud de conocimientos matemáticos.

Con el paso de los años y fundamentalmente tras haber estudiado estos estudios de máster y realizado las prácticas junto a este tutor, nuestro concepto sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos/as ha cambiado considerablemente. Hemos aprendido que sin motivación no existe aprendizaje.

Para desempeñar nuestra labor como docentes debemos cuidar varios pilares: la vocación, formación en la materia, motivación y ganas de enseñar a los estudiantes. Llevaremos a cabo un proceso de aprendizaje a lo largo de toda nuestra carrera como docentes, debemos ser críticos con nuestra práctica profesional, analizar sus puntos fuertes y sus puntos débiles, para así realizar los cambios necesarios para poder adaptarnos a todos los estudiantes y grupos que se nos presenten.

Si, como hemos planteado en este trabajo, llevamos a cabo una metodología innovadora a nuestro aula, ésta nos supondrá un esfuerzo extra. Pero con energía y motivación podemos llevarla a cabo. Debemos pensar en nuestros alumnos/as por encima de todo, actividades que se adapten a sus necesidades, a su ritmo de aprendizaje, etc. y centrar nuestros esfuerzos en motivarles cada día.

Porque los que hoy son nuestros alumnos/as, mañana serán profesionales que se mueven en el mundo laboral y deben estar bien preparados para afrontar todos los obstáculos que la vida les depara. Y, junto con su familia, los docentes somos un pilar fundamental en su enseñanza.

"Dime y lo olvido, enséñame y lo recuerdo, involúcrame y lo aprendo"
Benjamin Franklin

8. REFERENCIAS

Baños, R., Del Mar Ortiz-Camacho, M., Baena-Extremera, A., & Tristán-Rodríguez, J. L. (2017). Satisfacción, motivación y rendimiento académico en estudiantes de Secundaria y Bachillerato: antecedentes, diseño, metodología y propuesta de análisis para un trabajo de investigación. *Espiral Cuadernos Del Profesorado*, *10*.

Barriga, F., & Hernández, G. (1999). Estrategias docente para un aprendizaje significativo, Una interpretación Constructivista. *Estrategias de Enseñanza Para La Promoción de Aprendizajes Significativos*, *5*, 232.

Blánquez, S. (2000). Sobre la noción de límite en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. *SEIEM*, *I*(2), 59–81.

Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa (RELIME)*, *11*(2), 171–194.

Chocarro, E. (2018). Procesos y contextos educativos. Temario de la asignatura. Universidad de La Rioja.

Davidson, Neil; Lambdin Kroll, D. (1991). An Overview of Research on Cooperative Learning Related to Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*, 362–365.

Espinoza, L., & Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de límite de función: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de Las Ciencias*, *18*(3), 355–368.

Fonseca Pedrero, E. (2018). Aprendizaje y desarrollo de la personalidad. Temario de la asignatura. Universidad de La Rioja.

Gavela, D. (2018). Guía par a el Trabajo Fin de Máster. Dirección de Estudios del Máster.

Goikoetxea, Edurne; Pascual, G. (2002). Aprendizaje Cooperativo: Bases teóricas y hallazgos empíricos que explican su eficacia. *Educación XX1, Núm. 5, 2002, Pp. 227- 247*.

Johnson, David W., Maruyama, Geoffrey, Johnson, Roger, Nelson, Deborah, Skon, L. (1981). Effects of cooperative, competitive, and individualistic goal structures on achievement: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, *Vol*

89(1), 47–62.

Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Holubec, E. J. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula- Cooperative Learning in the classroom*. *(Ascd)*.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the Intuitive bear on the Formal; A Didactical Approach for the Understanding of the Limit of a Sequence. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 259–288.

Pachano, Lizabeth; Terrán de Serrentino, M. (2005). Aprendizaje cooperativo. Una experiencia constructivista en clase de matemática.

Pons, R. M., González-Herrero, M. E., & Serrano, J. M. (2008). Aprendizaje cooperativo en matemáticas: Un estudio intracontenido. *Anales de Psicologia*, *24*(2), 253–261. https://doi.org/10.6018/42761

Rojas Soriano, R. (1999). Investigación-Acción en el Aula. Plaza y Valdés S.A de C.V.

Santaolalla, E. (2009). Matemáticas y estilos de aprendizaje. *Revista Estilos de Aprendizaje*, *2*(4), 56–69.

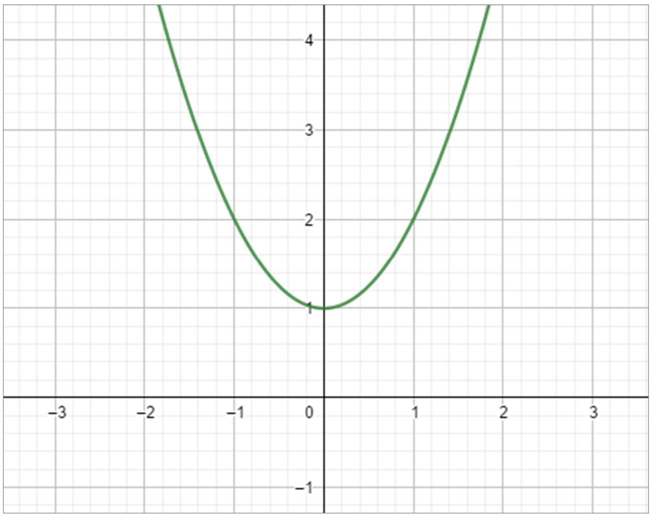
ANEXOS

ANEXO 01 UNIDAD DIDÁCTICA 4º ESO

A continuación presentamos cada una de las actividades propuestas para trabajar la Unidad Didáctica de 4º ESO- Límites de funciones.

UD 4º ESO - SESIÓN 1 - ACTIVIDAD 1

En primer lugar, dibujamos en la pizarra la siguiente gráfica correspondiente a la función: $f(x) = x^2 + 1$



Pediremos a los alumnos/as que calculen de forma gráfica el comportamiento de la función cuando las "x" se acercan a 1, es decir, si usamos la nomenclatura matemática:

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 1$$

De la misma forma, plantearemos la resolución de este mismo ejercicio, pero en esta ocasión de forma analítica, mediante la construcción de una tabla de valores.

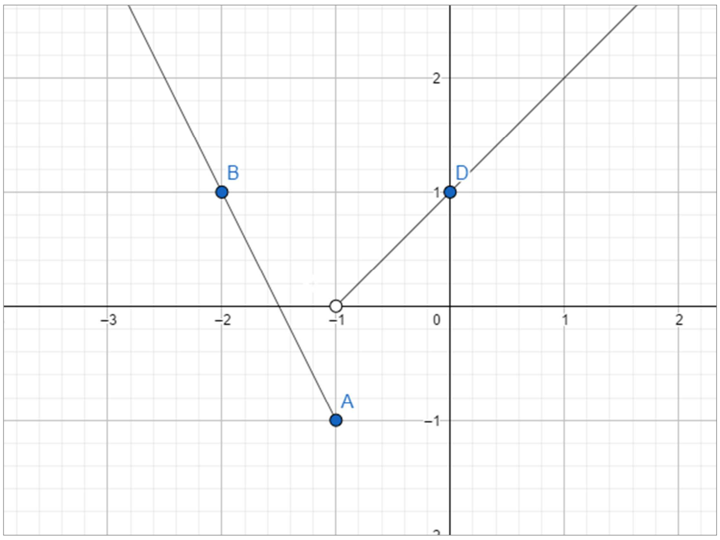
Para finalizar esta actividad, realizaremos una breve explicación teórica que incluya la nomenclatura matemática del límite de una función:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \text{L}$$

UD 4º ESO - SESIÓN 1 - ACTIVIDAD 2

La segunda actividad de la sesión 1, también requiere el dibujo de una gráfica en la pizarra. En este caso, corresponde a la siguiente función definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & si\ x \leq -1 \\ x + 1 & si\ x > -1 \end{cases}$$



Una vez trazada, pediremos a los alumnos/as que calculen de forma gráfica el comportamiento de la función cuando las "x" se acercan a -1, es decir, si usamos la nomenclatura matemática:

$$\lim_{x \to -1} f(x)$$

En segundo lugar, solicitaremos que resuelvan este ejercicio de forma analítica, mediante la construcción de una tabla de valores.

UD 4º ESO - SESIÓN 1 - ACTIVIDAD 3

Ejercicio 1. Completa la tabla de valores en tu cuaderno para determinar la tendencia de las siguientes funciones en el punto x=2.

$$f(x) = x^2 - 2 \qquad\qquad g(x) = \frac{4}{2-x}$$

x	1	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1	3
$f(x)$								
$g(x)$								

Ejercicio 2. Calcula el límite de las funciones en los valores indicados.

a) $f(x) = \frac{x}{x-2}$, para $x = 3$ y $x = 1$

b) $f(x) = \sqrt{x} - 1$, para $x = 0$ y $x = 4$

c) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{1-x}}$, para $x = 1$ y $x = 2$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$, para $x = 2$

Ejercicio 3. Halla los límites, construyendo una tabla de valores en cada caso para estudiar hacia qué valor tiende la función.

a) $\lim_{x\to -2} \frac{2+x}{x^2-2}$

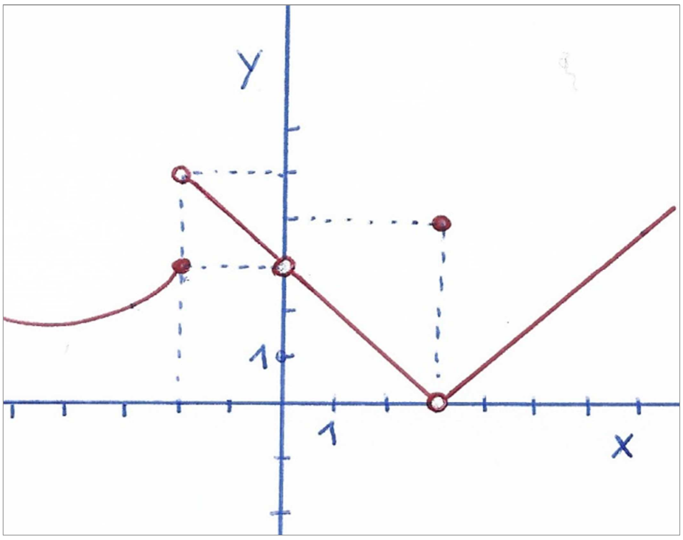
b) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{x}$

c) $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-1}$

d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} tg\ x$

Ejercicio 1. Calcula los límites laterales de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x tiende a 0 e indica si existe el límite en ese punto.

Ejercicio 2. A partir de la gráfica de f(x), indica el valor de la función, los límites laterales y el límite si existe en:



a) $x = -2$

b) $x = 0$

c) $x = 1$

d) $x = 3$

Ejercicio 3. Representa la función f(x) y calcula los límites laterales cuando x tiende a -2 y a 2. ¿Existe el límite en cada caso?

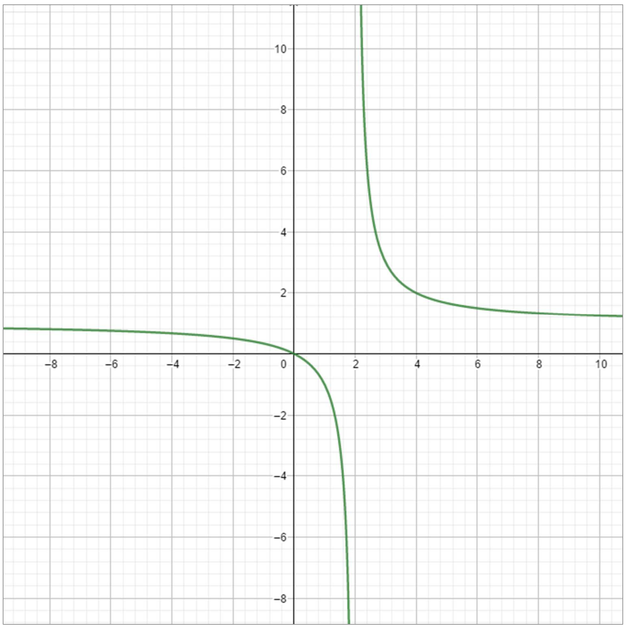
$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & si\ x \leq -2 \\ x + 2 & si - 2 < x \leq 2 \\ 4 & si\ x > 2 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Calcula los límites laterales para x=2 de la siguiente función. ¿Existe $\lim_{x \to 2} f(x)$?

$$f(x) \begin{cases} x - 1 & si\ x < 2 \\ 5 - x^2 & si\ x > 2 \end{cases}$$

UD 4º ESO - SESIÓN 2 - ACTIVIDAD 2

Para desarrollar la presente actividad haremos uso de la pizarra. En ella, dibujaremos la siguiente gráfica, que corresponde a la función: $f(x) = \frac{1}{x-2}$

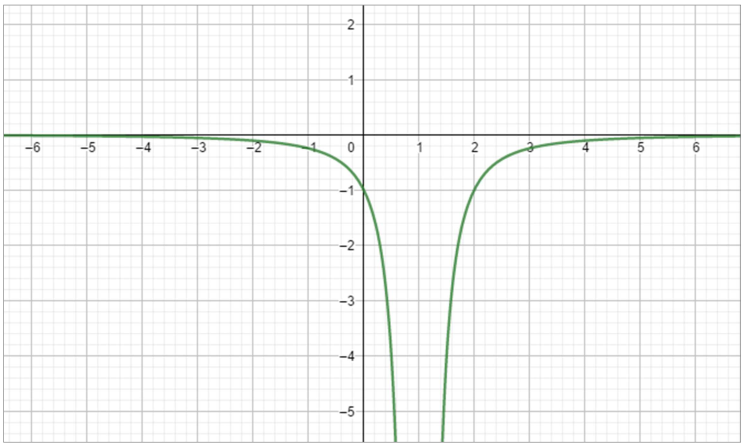


Plantearemos a los alumnos/as el cálculo, de forma gráfica, el comportamiento de la función anterior cuando las "x" se acercan a 2, es decir, si lo expresamos con nomenclatura matemática:

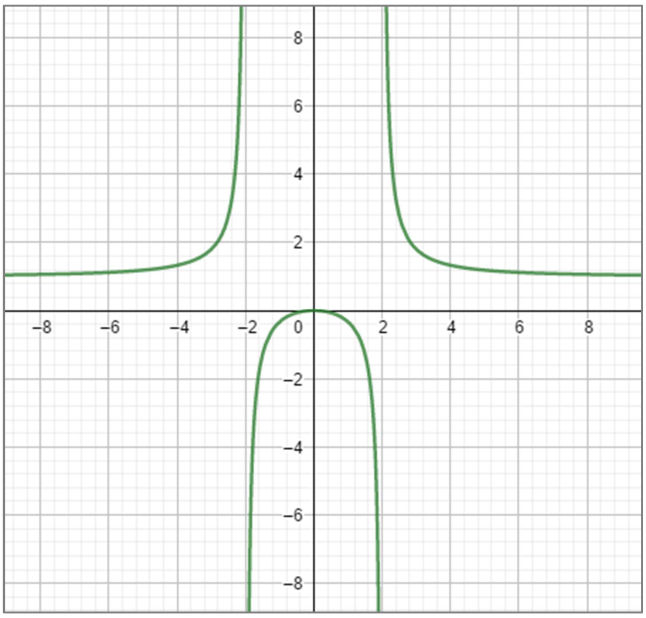
$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$$

Una vez finalizada la primera parte, pediremos la resolución de este mismo ejercicio de forma analítica, mediante la construcción de una tabla de valores.

Ejercicio 1. Calcula el límite de la función $f(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}$ cuando x tiende a 1.



Ejercicio 2. A partir de la gráfica dada de la función $g(x)$, halla el valor de los siguientes límites:



a) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$

b) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$

c) $\lim_{x\to -2^+} g(x)$

d) $\lim_{x\to -2^-} g(x)$

Ejercicio 3. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x^2-2}{2-x}\right)$

c) $\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x^2-2}{2-x}\right)$

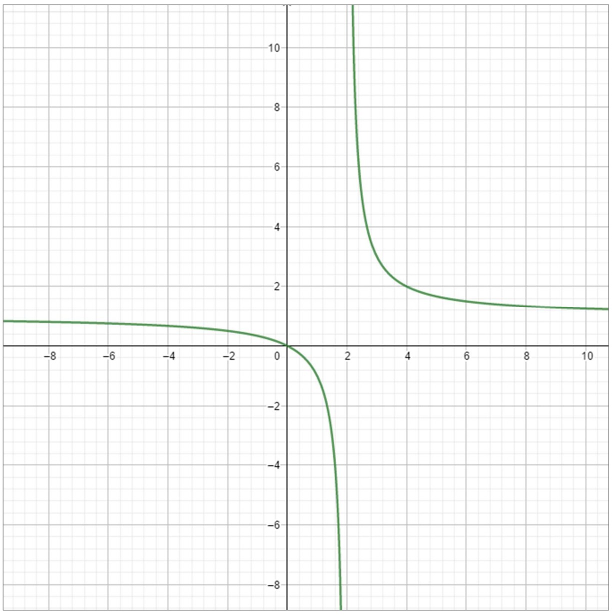
b) $\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x^2-4}{2-x}\right)$

d) $\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x^2-4}{2-x}\right)$

Ejercicio 4. Calcular el límite de la función $f(x) = \frac{5}{|x-2|}$ cuando x tiende a 2.

UD 4º ESO - SESIÓN 3 - ACTIVIDAD 1

Al comienzo de esta actividad, representaremos la siguiente gráfica en la pizarra, que corresponde a la función: $f(x) = \frac{1}{x-2}$



Acto seguido, y en primer lugar, indicaremos a los alumnos/as que calculen de forma gráfica el comportamiento de la función cuando las "x" se acercan a +∞ y a -∞, es decir, si usamos la nomenclatura matemática:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-2} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-2}$$

En segundo lugar, plantearemos la resolución de este mismo ejercicio, pero en esta ocasión de forma analítica, mediante la construcción de una tabla de valores.

UD 4º ESO - SESIÓN 3 - ACTIVIDAD 2

Ejercicio 1. Calcula los siguientes límites de funciones.

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x+1}{5+x}\right)$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-x}{2x^2+1}\right)$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{5x-30}\right)$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{5-x^2}\right)$

Ejercicio 2. Indica cuáles de los siguientes límites dan lugar a indeterminaciones (expresiones de las que no podemos conocer su valor directamente) y cuáles pueden calcularse directamente. En este último caso, calcula su valor.

a) $\lim_{x\to\infty}(2x-1)$

b) $\lim_{x\to-\infty}(2x-1)$

c) $\lim_{x\to\infty}(2x-x^2)$

d) $\lim_{x\to-\infty}(2x-x^2)$

e) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-2x}$

f) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-2x}$

g) $\lim_{x\to\infty}(1-2x)^x$

h) $\lim_{x\to-\infty}(1-2x)^x$

i) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x}{3+x}\right)^x$

j) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1+2x}{3+x}\right)^{1-x}$

UD 4º ESO - SESIÓN 3 - ACTIVIDAD 3

Ejercicio 1. Si el $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$, calcula:

a) $\lim_{x\to 1}(f+g)(x)$

b) $\lim_{x\to 1}(f\cdot g)(x)$

c) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

d) $\lim_{x\to 1}[f(x)]^{g(x)}$

Ejercicio 2. Calcula los siguientes límites utilizando sus propiedades.

a) $\lim_{x\to -3}(x^2-7)$

b) $\lim_{x\to 4}(x^{20}-6)(x-4)$

c) $\lim_{x\to 1}(7x-6)(x+1)$

d) $\lim_{x\to -1}(6+4x)^{2x}$

Ejercicio 3. Sean las funciones $f(x) = 2x+1$ y $g(x) = \frac{2x-3}{x+2}$, calcula:

a) $\lim_{x\to 5}(f+g)(x)$

b) $\lim_{x\to 5}(g-f)(x)$

c) $\lim_{x\to -2} 3\cdot g(x)$

d) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

UD 4º ESO - SESIÓN 4 - ACTIVIDAD 1

La presente actividad comienza con el siguiente ejercicio. Para que esté a la vista de todos los alumnos/as escribiremos el siguiente límite en la pizarra:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Pediremos su resolución. Si lo resuelven como hasta ahora, observarán que los cálculos les derivan a una expresión que no pueden operar ni resolver, es decir, a una indeterminación.

Les lanzaremos la siguiente pregunta: ¿De qué forma podríamos resolverlo?

UD 4º ESO - SESIÓN 4 - ACTIVIDAD 2

En primer lugar planteamos el siguiente ejercicio siguiente en la pizarra y pediremos a los alumnos/as que lo resuelvan:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x^2 - 3x}{5x^3 + 6}$$

Los alumnos/as observarán que los cálculos que han aprendido hasta el momento les llevan a una expresión que no pueden operar ni resolver, es decir, a una indeterminación.

Les realizaremos la siguiente pregunta: ¿De qué forma podríamos resolverlo?

En segundo lugar, comentaremos los 3 casos existentes para esta indeterminación.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 3} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^3 + 3} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x + 3}$$

UD 4º ESO - SESIÓN 4 - ACTIVIDAD 3

Ejercicio 1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x-2}$ b) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x-3}$

Ejercicio 2. Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x^2-2x}{x}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\frac{x^2+x}{x^2-2x-3}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 3^+} \left(\frac{x^3-x^2-6x}{x^3-4x^2-3x+18}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to 3^-} \left(\frac{x^3-x^2-6x}{x^3-4x^2-3x+18}\right)$

Ejercicio 3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x^2-3x+1}{3x^2+6x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x^2-3x}{2x^3-x^2+2}\right)$

Ejercicio 4. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{4-x}{3+4x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x^2-2x}{3+4x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x^3+1}{1-x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x^3+x^2-5}{1-x^2+4x^3}\right)$

Ejercicio 5. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{x+5}{3-x^2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{-x+5}{3-x^2}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{4-x}{3+4x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{1-x^2+4x^3}{x^3+x^2-5}\right)$

UD 4º ESO - SESIÓN 5 - ACTIVIDAD 1

Comenzaremos esta actividad escribiendo el siguiente ejercicio en la pizarra:

$$\lim_{x \to \infty} x^5 - x^3$$

Indicaremos a los alumnos/as que lo resuelvan. Puede que algún alumno/a encuentre dificultades para resolverlo, pero la resolución de este límite se realiza de forma directa.

Acto seguido, Plantearemos este ejercicio y, de la misma forma, animaremos a los alumnos/as a resolverlo:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 5}{x + 3} - 2x$$

En el desarrollo de este ejercicio sí que verán cómo llegan a una expresión que no pueden operar ni resolver, es decir, a una indeterminación.

Crearemos una lluvia de ideas para buscar una forma de resolverlo.

Para concluir la actividad, Realizaremos una explicación sobre la resolución de un caso especial de este tipo de límites:

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - 2} - x$$

UD 4º ESO - SESIÓN 5 - ACTIVIDAD 2

En primer lugar plantearemos el siguiente ejercicio en la pizarra y pediremos a los alumnos/as que lo resuelvan:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x+5}{2x-3} \right)^{x+1}$$

Si los alumnos/as resuelven el límite como lo han hecho hasta ahora, observarán que los cálculos les derivan a una expresión que no pueden operar ni resolver, es decir, a una indeterminación.

Haremos que los alumnos/as discurran para dar con una forma de resolver este ejercicio.

UD 4º ESO - SESIÓN 5 - ACTIVIDAD 3

Ejercicio 1. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+3}-\frac{x^2-2}{x+1}\right)$

$b)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+5}\right]$

Ejercicio 2. Resuelve estas indeterminaciones.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x+1}{x+5}-x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}-x\right]$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x+1}{x+5}-\frac{x^2+4x-3}{x+1}\right)$

Ejercicio 3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5}{n^2+4n}\right)^{n-2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5}{n^2+4n}\right)^{2-n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n}{2n^2+5}\right)^{n-2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n}{2n^2+5}\right)^{2-n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n}{2n^2+5}\right)^{\frac{2n-3}{1+n}}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5}{n^2+4n}\right)^{\frac{1+n}{2n-3}}$

Ejercicio 4. Halla el valor de los siguientes límites de funciones:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-1)^{\frac{1}{2x-2}}$

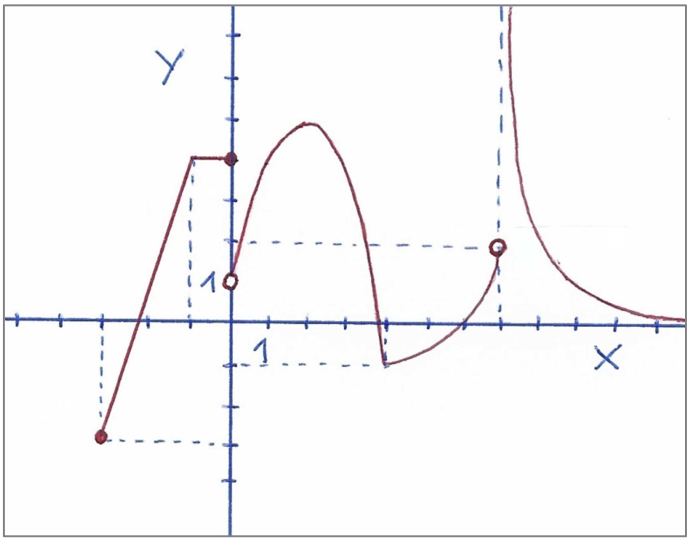
b) $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-3)^{\frac{1}{x-2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{x-1}}$

d) $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\frac{x+1}{x+4}\right)^{\frac{x+1}{x-3}}$

UD 4º ESO - SESIÓN 6 - ACTIVIDAD 1

Ejercicio 1. Clasifica las discontinuidades de la siguiente función e indica los intervalos en los que es continua.



Ejercicio 2. Estudia la continuidad y clasifica las discontinuidades de la función: Además, esboza su gráfica de forma aproximada.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si\ x < 0 \\ 2 - x & si\ 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4 & si\ 2 > x \end{cases}$$

Ejercicio 3. Estudia la continuidad y clasifica las discontinuidades de:

$$f(x) = \frac{2x + 2}{x^2 + 3x + 2}$$

Ejercicio 4. Determina los valores de a y b para que la siguiente función sea continua en todo su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & si\ x < 3 \\ 5 & si\ x = 3 \\ 8 + bx & si\ x > 3 \end{cases}$$

LIMITES

INMEDIATOS

1. $\lim_{x\to 2} (x^2+3)$
2. $\lim_{x\to -2} (x^2+3)$
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3}$
4. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5}$
5. $\lim_{x\to 0} 2^{x+2}$
6. $\lim_{x\to 0} 10^x$
7. $\lim_{x\to 0} e^x$
8. $\lim_{x\to 1} (\log x)$
9. $\lim_{x\to 4} \sqrt{x}$
10. $\lim_{x\to 3} \sqrt{x^2+7}$
11. $\lim_{x\to +\infty} (x^2+3)$
12. $\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x+10}-4)$
13. $\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+2x-3})$
14. $\lim_{x\to +\infty} 4^{x+2}$
15. $\lim_{x\to +\infty} (2^{-x})$
16. $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$
17. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{-2x+5}{3-x}\right)^x$

$\boxed{\dfrac{K}{0}} \Longrightarrow$ límites laterales

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{6}{x} \begin{cases} 0^- = -\infty \\ 0^+ = +\infty \end{cases}$
2. $\lim_{x\to 4} \dfrac{1}{x-4} \begin{cases} 4^- = -\infty \\ 4^+ = +\infty \end{cases}$
3. $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2} \begin{cases} 0^- = \\ 0^+ = \end{cases}$
4. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x+1}{x-2} \begin{cases} 2^- = -\infty \\ 2^+ = +\infty \end{cases}$
5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{3}{1+2^{1/x}} \begin{cases} 0^- = 3 \\ 0^+ = 0 \end{cases}$
6. $\lim_{x\to 3} \dfrac{1}{x^2-9} \begin{cases} 0^- = \\ 0^+ = \end{cases}$

Puntos frontera ⇝ Funciones definidas "A TROZOS $\Longrightarrow$ límites laterales

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ x+2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 2} f(x)$

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

① $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^8+2x^3-7}{5x^3+2x^2-3} = +\infty$

② $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^3+2x^2-3}{3x^8+2x^3-7} = 0$

③ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x^3-2x^2+7}{5x^3-x+12} = \dfrac{6}{5}$

④ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x+3)^2}{5x^3+6x-10} = 0$

⑤ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x+1)^5(x+2)^7}{(2x+3)^{12}} = \dfrac{1}{128}$

⑥ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-7}{5x^2+14x-9} = \dfrac{3}{5}$

⑦ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+2)^2-4}{x} = \infty$

$$\boxed{\infty - \infty}$$

① $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \dfrac{1}{2}$

② $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right) = 0$

③ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x+2}\right) =$

④ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x - \sqrt{x^2-x-1}\right) = \infty$

⑤ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2-2} - 2x\right)$

⑥ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-3x+2} - x\right) = -\dfrac{3}{2}$

⑦ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-3x} - \sqrt{x^2+7x}\right) =$

$$\boxed{\frac{0}{0}}$$

1. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-6x+8}{x-4} = 2$
2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-3x^2+9x-27}{x^2-9} = 3$
3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x^2-9} = \dfrac{9}{2}$
4. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1+x^3}{1-x^4} = \dfrac{3}{4}$
5. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-5x}{x^2+5x-50} = \dfrac{1}{3}$
6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-3x^2+4} = \dfrac{5}{3}$
7. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2-4x+3} = 4$
8. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-5x^2+8x-4} = 3$
9. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2+7x+6}{x^3+3x^2+3x+2} = -\dfrac{1}{3}$
10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \dfrac{3}{2}$
11. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^3-8} =$
12. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} = 4$
13. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-ax}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2}$
14. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2-8}{x^2+x-2} =$
15. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x+2}{x+1}$
16. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-x}{2x^2-4x} =$

$$\boxed{\frac{0}{0}}$$

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = -\dfrac{1}{2}$
2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{7+x}-3} = 24$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{6-x}-2} = -4$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{24+x}-5}{x-1} = \dfrac{1}{10}$
5. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x-3}-2}{x^2-49} = \dfrac{1}{56}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x} = \dfrac{1}{4}$
7. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = 6$
8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \dfrac{3}{4}$
9. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{\sqrt{5+x}-3} =$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{5x+1}} =$
11. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3-x}{2\sqrt{x+1}-4} =$

1^{∞}

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{x+1}=e^{2/3}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{3x}=e^{3}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}=e^{2}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5}{x^2+5}\right)^{5x}=1$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}=e^{1/2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+6}{5x}\right)^{x}=e^{6/5}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{3x^2-7}\right)^{6x}=$

8. $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)^{2/x-1}=$

9. $\lim\limits_{x\to2}(x-1)^{\frac{1}{x-2}}=e$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+4}{3x^2+5}\right)^{x^2+3}=e^{1/3}$

11. $\lim\limits_{x\to1}x^{2/1-x}=e^{-2}$

12. $\lim\limits_{x\to0}(1-4x)^{1/2x}=e^{-2}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x-4}{6x-2}\right)^{\frac{x+1}{2}}=e^{-1/3}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x}\right)^{x}=$

15. $\lim\limits_{x\to3}(7-2x)^{\frac{7}{x-3}}=$

UD 4º ESO - SESIÓN 8 – EXAMEN

APELLIDOS:	NOMBRE:	NOTA:
FECHA:	CURSO:	

1. Calcula los siguientes límites. (2 puntos)

a) $\lim_{x\to 4} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x-5}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{5x}{x^3-2x}$

b) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x+3}{x^2-1}$

d) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+4x+3}{x^3+1}$

2. Calcula los siguientes límites en el infinito. (2 puntos)

a) $\lim_{x\to -\infty} -x^5+4x^3-6x+1$

c) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+7x+15}{10x-3x^2}$

b) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-5x+1}$

d) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{3x^2-x^3}{4-5x^3}+\frac{4}{x}\right)$

3. Calcula $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{5x}$ **(1,5 puntos)**

4. Estudia la continuidad de las siguientes funciones. (1,5 puntos)

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{2x+2}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0{,}5^x & si\ x < 0 \\ \sqrt{x+1} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si\ x < -1 \\ \frac{1}{x} & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$

5. Dada la función a trozos $\boldsymbol{f}(x) = \begin{cases} \boldsymbol{ax} & \boldsymbol{si\ x < 1} \\ \boldsymbol{2x^2 - a} & \boldsymbol{si\ x \geq 1} \end{cases}$ **se pide: (3 puntos)**

a) ¿Para qué valor de *a* la función es continua?

b) Para el valor de *a* del apartado anterior, representa gráficamente la función.

c) Para *a* = –1, calcula los siguientes límites:

$\lim_{x\to 1^-} f(x)$ $\quad\lim_{x\to 1^+} f(x)$ $\quad\lim_{x\to 3} f(x)$ $\quad\lim_{x\to -\infty} f(x)$